ونقول إن العملية $\circ$ تتوزع على العملية $\star$ إذا تحقق الشرطان ① ، ② في آن واحد.

مثال (٥ــ١٠)

(١) إن $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ نظام مغلق تتوزع فيه عملية الضرب «$\cdot$» على عملية الجمع «$+$» لأنه:

$$\begin{aligned}\forall x, y, z \in \mathbb{Z}: x\cdot(y+z) &= x\cdot y + x\cdot z\\ &= y\cdot x + z\cdot x\\ &= (y+z)\cdot x\end{aligned}$$

(٢) وبالمثل فإن كلاً من $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ، $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ، $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ نظام مغلق (ذو عمليتين ثنائيتين) فيه عملية الضرب «$\cdot$» تتوزع على عملية الجمع «$+$».

(٣) إن النظامين $(P(A), \cup, \cap)$ ، $(P(A), \cap, \cup)$ مغلقان وفيهما تتوزع العملية الثانية على العملية الأولى، كما رأينا ذلك سلفًا في فصل المجموعات.

(٤) إن النظام $(\mathbb{Z}, +, -)$ مغلق ولكن عملية الطرح «$-$» لا تتوزع على عملية الجمع «$+$» لا من اليمين ولا من اليسار لأنه:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}: x-(y+z) \neq (x-y)+(x-z) = 2x-(y+z)$$ $3-(2+1) \neq$

وكذلك

$$(y+z)-x \neq (y-x)+(z-x) = (y+z)-2x$$

$\forall A_1, A_2 \in P(A): A_1 \cap A_2 \in P(A)$

$A_1 - A_2 \in P(A)$

مثال (٥ــ١١)

إن النظامين $(p(A), \cup, -)$ ، $(p(A), \cap, -)$ مغلقان مهما كانت المجموعة A والمطلوب دراسة خاصة التوزيع لكل منهما (أي تحديد ما إذا كانت العملية الثانية «$-$» تتوزع على العملية الأولى من اليسار أو من اليمين أو من كليهما).

الحل

أولاً :

النظام $(p(A), \cup, -)$

(أ) عملية الطرح «$-$» لاتتوزع من اليسار على عملية الاتحاد «$\cup$» لأنه:

$$\begin{aligned}\forall A_1, A_2, A_3 \in p(A): A_1-(A_2\cup A_3) &= A_1\cap(A_2\cup A_3)' && \text{نظرية}\\ &= A_1\cap(A_2'\cap A_3') && \text{لماذا ؟}\\ &= (A_1\cap A_2')\cap(A_1\cap A_3') && \text{لماذا ؟}\end{aligned}$$