

بيّن كيف يمكن أن تثبت ما يلي: اذا كانت f تحليلية على الطوق $D(z_0, r_1, r_2)$ ، فإنه

$$\text{لأي } z \text{ في الطوق } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ حيث } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}} \text{ لكل } n \in \mathbb{Z}$$

و γ منحني بسيط مغلق داخل الطوق بالاتجاه الموجب.

أوجد مفكوك لورانت للدالة $f(z) = z \sinh\left(\frac{1}{z}\right) - 1$ في الطوق $0 < |z| < \infty$ ثم استخدم هذا المفكوك لحساب التكامل $\int_{\gamma} z^3 (z \sinh\left(\frac{1}{z}\right) - 1) dz$ حيث γ هي الدائرة $|z| = 1$ بالاتجاه الموجب.

أوجد متسلسلة تايلور للدالة $f(z) = \frac{\sin z - z}{z^3}$ حول $z = 0$ ، ثم استخدم هذه المتسلسلة لحساب $f^{(80)}(0)$.

أوجد سلسلة لورانت للدالة $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3}$ في الطوق اللانهائي $4 < |z| < \infty$ ، ثم استخدم هذه السلسلة لحساب قيمة التكامل $\int_{\gamma} z^2 f(z) dz$ حيث γ هي الدائرة $|z| = 5$ في الاتجاه الموجب.

- أوجد مفكوك لورانت للدالة $f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 1)}$ في جميع النطاقات الممكنة.

- بيّن أن $z = 0$ هي نقطة شاذة زائفة للدالة $f(z) = \frac{\cos(z) - 1}{z^2}$ ، ثم أحسب $f^{(10)}(0)$.

- احسب مفكوك لورانت في جميع الاطواق الممكنة التي مركزها $z = 0$ و ذلك للدالة $f(z) = \frac{z}{z^2 - z - 2}$.

- بيّن أن للدالة $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ نقطة شاذة منعزلة في $z = 0$ ، مع تحديد نوعها.

ثم احسب $\int_{\gamma} z^{10} f(z) dz$ ، حيث γ هي الدائرة $|z| = 1$ بالاتجاه الموجب.

- لتكن $f(z) = \frac{e^z}{p(z)}$ ، حيث $p(z)$ كثيرة حدود درجتها $n \geq 1$. أثبت تفصيلاً

وجود قطب على الاقل للدالة f في \mathbb{C} . هل تستطيع تحديد درجة القطب؟

- احسب مفكوك لوران للدالة $f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3}$ في الطوق $1 < |z| < 3$

- جد مفكوك لوران في جميع الاطواق الممكنة للدالة $f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3}$

بين أن النقطة الشاذة المنعزلة للدالة $f(z) = \frac{e^{z^2} - 1}{z^2}$ زائفة. ثم أحسب المشتقة

الثمانين للدالة f عند النقطة $z = 0$.

- جد مفكوك لوران للدالة $f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$ في الطوق $|z| > 2$ ، ثم استخدم المفكوك

لحساب $\int_{\gamma} \frac{z^4 dz}{z^2 + 3z + 2}$ ، حيث α هي الدائرة $|z| = 3$ بالاتجاه الموجب.

جد مفكوك لوران للدالة $f(z) = \frac{1}{(2z-1)(z+2)}$ في الطوق $|z| > 2$ ، ثم جد

$\int_{\gamma} z^4 f(z) dz$ ، حيث γ هي الدائرة $|z| = 3$ بالاتجاه الموجب.

بين أن $z = 0$ نقطة شاذة زائفة للدالة $f(z) = \frac{z - \sin(z)}{z^3}$ ثم احسب $f^{(20)}(0)$

جد مفكوك لوران للدالة $f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$ في الطوق $2 < |z| < 3$ ، ثم استخدم

ذلك لإيجاد قيمة التكامل $\int_{\gamma} z^{17} f(z) dz$ ، حيث γ مسار بسيط مغلق في الطوق أعلاه

و يحيط بنقطة الاصل.

- احسب مفكوك لوران للدالة $f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)}$ في الطوق $0 < |z| < 2$ ، ثم جد قيمة

$\int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z^5}$ ، حيث γ هي الدائرة $|z| = 1$ بالاتجاه الموجب.