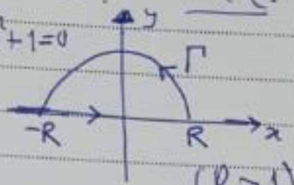
٣) باستخدام الرواسب: أحسب التكامل $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

ج ٣: اعتبر التكامل $\oint_C \frac{dz}{z^4+z^2+1}$ ، حيث C نصف الدائرة كما في الشكل:

$z^4+z^2+1=0 \Leftarrow z=\pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

فقط $\underset{z_1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ و $\underset{z_2}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ داخل C ،



$(R>1)$

$$Res(f,z_1)=\lim_{z\to z_1}\left\{(z-z_1)\cdot\frac{1}{z^4+z^2+1}\right\}=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{12}i$$

$$Res(f,z_2)=\lim_{z\to z_2}\left\{(z-z_2)\cdot\frac{1}{z^4+z^2+1}\right\}=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{12}i$$

$$\oint_C \frac{dz}{z^4+z^2+1}=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^4+x^2+1}+\int_{\Gamma}\frac{dz}{z^4+z^2+1} \quad \ldots\ldots (*)$$

$\underline{\int_{\Gamma}\frac{dz}{z^4+z^2+1}}$: $|z^4+z^2+1| \geq |z|^4-|z|^2-1$

$= R^4-R^2-1$ on Γ

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{z^4+z^2+1}\right| \leq \frac{1}{R^4-R^2-1} \text{ on } \Gamma$$

$$\left|\int_{\Gamma}\frac{dz}{z^4+z^2+1}\right| \leq \frac{1}{R^4-R^2-1}\cdot\pi R$$

نأخذ النهاية عندما $R\to\infty$:

$$\Rightarrow \frac{\pi R}{R^4-R^2-1}\to 0 \Rightarrow \left|\int_{\Gamma}\frac{dz}{z^4+z^2+1}\right|\to 0 \Rightarrow \int_{\Gamma}\frac{dz}{z^4+z^2+1}\to 0 \text{ as } R\to\infty$$

نرجع إلى (*) :

من نظرية الرواسب :

$$2\pi i\left[Res(f,z_1)+Res(f,z_2)\right]=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^4+x^2+1}+\int_{\Gamma}\frac{dz}{z^4+z^2+1}$$

$$2\pi i\left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{12}i+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{12}i\right)=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^4+x^2+1}+\int_{\Gamma}\frac{dz}{z^4+z^2+1}$$

نأخذ النهاية : $R \to \infty$:

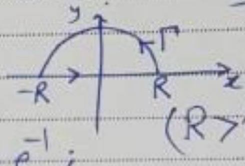
$$2\pi i\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}+0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{6}\pi=\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}$$ (لأن $\frac{1}{x^4+x^2+1}$ دالة زوجية)

س٣) باستخدام الرواسب: أحسب التكامل $\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+1)^5}\,dx$

ج٣: اعتبر التكامل: $\oint_C \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^5}\,dz$ حيث C نصف الدائرة كما في الشكل:



$(R>1)$

الدالة المكاملة لها القطبين $z=\pm i$، من الرتبة 5
والذي داخل C هو: i

$$Res(f,i)=\lim_{z\to i}\left[(z-i)^5\cdot\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^5}\right]=\frac{-e^{-1}}{32}i$$

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^5}\,dz=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^5}\,dx+\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^5}\,dz \;\text{------}\;(*)$$

$\underline{\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^5}\,dz}$: $\quad |z^2+1|\geq |z|^2-1$

$\qquad = R^2-1$ on Γ

$$\left|\frac{1}{(z^2+1)^5}\right|\leq\frac{1}{(R^2-1)^5} \text{ on } \Gamma$$

كذلك لاحظ أن: $|e^{iz}|=e^{-y}\leq 1$ عندما $y\geq 0$

$$\Rightarrow \left|\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^5}\right|\leq\frac{1}{(R^2-1)^5}$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^5}\,dz\right|\leq\frac{1}{(R^2-1)^5}\pi R$$

نأخذ النهاية عندما $R\to\infty$:

$$\frac{\pi R}{(R^2-1)^5}\to 0\Rightarrow\left|\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^5}\,dz\right|\to 0\Rightarrow\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^5}\,dz\to 0 \text{ as } R\to\infty$$

نرجع إلى $(*)$:

من نظرية الرواسب:

$$2\pi i\,[Res(f,i)]=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^5}\,dx+\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^5}\,dz$$

$$2\pi i\left(\frac{-e^{-1}}{32}\right)i=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^5}\,dx+\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^5}\,dz$$

نأخذ: $R\to\infty$:

$$\frac{\pi}{16e}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^5}\,dx+0$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{(x^2+1)^5}\,dx+i\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{(x^2+1)^5}\,dx$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{(x^2+1)^5}\,dx=\frac{\pi}{32e}\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(x)}{(x^2+1)^5}\,dx=\frac{\pi}{32e}$$

(لأن $\frac{\cos(x)}{(x^2+1)^5}$ دالة زوجية)

١٣. أثبت صيغة التكامل $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+4\sin\theta}=\frac{2\pi}{3}$ باستخدام الرواسب

الحل: من الواضح أن المقام $5+4\sin\theta \neq$ صفراً مطلقاً وبالتالي فدالة التكامل محدودة على $[0 , 2\pi]$.

نستخدم التعويضتين التاليتين: $d\theta=\frac{dz}{iz}$ و $\sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i}$

$$\Rightarrow I=\int_C \frac{dz/iz}{5+4\cdot\frac{z-1/z}{2i}}$$

(حيث C دائرة الوحدة $|z|=1$ عكس اتجاه عقارب الساعة)

$$=-i\int_C \frac{dz/z}{5-2iz+2i/z}=-i\cdot\int_C \frac{dz/z}{5+\frac{2i-2iz^2}{z}}$$

$$=-i\cdot\int_C \frac{dz/z}{\frac{5z+2i-2iz^2}{z}}=i\cdot\int_C \frac{dz}{2iz^2-5z-2i}$$

أصفار المقام $2i\cdot z^2-5z-2i$ هي:

$$z=\frac{5\pm\sqrt{25-4(2i)(-2i)}}{2(2i)}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4i}=\frac{5\pm3}{4i}$$

$z_1=\frac{2}{i}=-2i$ (خارج دائرة الوحدة) ; $z_2=\frac{2}{4i}=-\frac{1}{2}i$ (داخل دائرة الوحدة وهو نقطة شاذة معزولة قطب بسيط)

ومن نظرية الرواسب لدينا: $I=2\pi i\cdot B$

حيث $B=Res\left(\frac{i}{2iz^2-5z-2i};z_2\right)=\lim_{z\to z_2}(z-z_2)\cdot\frac{i}{(z-z_2)(2iz-4)}=\frac{i}{-3}$

$$\Rightarrow I=2\pi i\cdot\frac{i}{-3}=\frac{2\pi}{3}$$