مع الإجابة الكاملة

جامعة الملك سعود King Saud University	كلية العلوم - قسم الرياضيات	الاختبار النهائي للمقرر ٢٠٩ ريض الفصل الدراسي الثاني ١٤٤٤ هـ المدة: ثلاث ساعات

السؤال الأول : (6 درجات)

(١) اختبر تقارب أو تباعد كلٍّ من المتتاليتين التاليتين: $\{2^{-n}\sin n\}$ ، $\left\{\frac{5n}{e^{2n}}\right\}$.

(٢) اختبر تقارب أو تباعد كلٍّ من المتسلسلات التالية:

(أ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n^2-7}{e^n(n+1)^2}$ (ب) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nlnn}$

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{n!}$ (د) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^n}{n^{2n}}$

السؤال الثاني: (8 درجات)

(١) أوجد نصف قطر وفترة تقارب متسلسلة القوى التالية: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2 3^n}(2x+1)^n$.

(٢) مثّل الدالة $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ بمتسلسلة قوى وجد فترة تقاربها ثم استنتج قيمة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

(٣) استخدم متسلسلة ماكلورين لدالة الاسية التالية: $e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\cdots$ ، $t\in\mathbb{R}$
لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل التالي: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

السؤال الثالث: (8 درجات)

(١) لتكن الدالة $f(x)=x$ المعرفة على الفترة $(-\pi,\pi)$، ولنفرض أنها دورية على $\mathbb{R}$ (أي $f(x+2\pi)=f(x)$).

(أ) جد متسلسلة فورييه (Fourier series) للدالة f على الفترة $(-\pi,\pi)$.

(ب) استنتج من (أ) قيمة المجموع التالي: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

فضلا اقلب الورقة

(٢) أوجد تكامل فورييه (Fourier integral) للدالة: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 2, & -1 < x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}$ على

الفترة $(-\infty, \infty)$، ثم استنتج قيمة التكامل المعتل: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\, d\alpha$.

السؤال الرابع: (18 درجة)

(١) إذا كانت $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$، فاحسب $x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y}$

(٢) أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية:

(أ) $(x^2+4)dy = (2x - 8xy)dx$

(ب) $xy\,\frac{dy}{dx} = (x^2 + 2y^2), y > 0, x > 0$

(ج) $y\,dx + (3 + 3x - y)\,dy = 0\ ,\ \ y > 0$

(د) $x\,\frac{dy}{dx} + (3x+1)y = e^{-3x}\ ,\ \ x > 0.$

(هـ) $y' - y = e^{2x}\,y^3$.

السؤال الأول:

$\boxed{6}$

(1

1) $0 \le |2^{-n}\sin(n)| = \left|\frac{\sin n}{2^n}\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ عندما $n \to \infty$

يعني $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{2^n} = 0$ (1)

---

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x}{e^{2x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{2e^{2x}} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{e^{2n}} = 0$ (1)

(2

أ) $\sum\limits_{1}^{\infty} \overbrace{\frac{8n^2-7}{e^n(n+1)^2}}^{a_n} \simeq \sum\limits_{1}^{\infty} \overbrace{\frac{8}{e^n}}^{b_n}$ أو $\simeq \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ (1)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(8n^2-7)e^n}{8e^n(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n^2-7}{8(n+1)^2} = 1 = k > 0$

بما أن $\sum\limits_{1} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ هندسية متقاربة ($r = \frac{1}{e} < 1$) إذن المقارنة

$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{8n^2-7}{e^n(n+1)^2}$ متقاربة

ب) $\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$، $a_n = \frac{1}{n\ln n} \to 0$ عندما $n \to \infty$

(1) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$، $f'(x) = \frac{-(\ln x+1)}{x^2(\ln x)^2} < 0;\ x \ge 2$

إذن نستطيع استخدام اختبار التكامل

$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim\limits_{l\to\infty} \int_2^l \frac{dx}{x\ln x} = \lim\limits_{l\to\infty} [\ln(\ln l) - \ln(\ln 2)] = \infty$ متباعد

يعني $\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ متباعدة

ج) $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{n!}$، $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+3)^2}{(n+1)!}}{\frac{(n+2)^2}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+3)^2}{(n+2)^2} \cdot \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1$

(1) إذن بالنسبة $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{n!}$ متقاربة

د) $\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^{2n}}$، $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{(\ln n)^n}{n^{2n}}\right]^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0 < 1$

(1) إذن بالجذر $\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^{2n}}$ متقاربة

السؤال الثاني :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 3^n}(2x+1)^n ; \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 3^n}(2x+1) ;$

$$x \neq -\frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|(-1)^{n+1}|\,|2x+1|^{n+1}}{(n+1)^2\, 3^{n+1}}}{\frac{|(-1)^n|\,|2x+1|^n}{n^2\, 3^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{|2x+1|}{3} = \frac{|2x+1|}{3} < 1$$

المتسلسلة متقاربة لكل $x \in \mathbb{R}$ تحقق $|2x+1| < 3 \iff -3 < 2x+1 < 3$

$\iff -4 < 2x < 2 \iff \boxed{x \in (-2, 1)}$ 2

1/2 عندما $x=-2$ ، لدينا $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 3^n}(-3)^n = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} ; \quad p = 2 > 1$ متقاربة

1/2 عندما $x=1$ لدينا $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 3^n}{n^2\, 3^n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ متقاربة مطلقاً

إذاً فترة تقارب المتسلسلة هي $\boxed{I = [-2, 1]}$ ، ونصف قطر التقارب $r = \frac{3}{2}$

---

2) 1 $g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$

1 $g'(x) = f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{1}^{\infty} n x^{n-1} ; \quad |x| < 1$

وبحالة خاصة عندما $x = \frac{1}{2}$ ، لدينا

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4 = \sum_{1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} \Rightarrow \boxed{2 = \sum_{1}^{\infty} \frac{n}{2^n}}$$ 1

---

3) $e^u = \sum_{0}^{\infty} \frac{u^n}{n!},\ u \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{-x^2} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$ 1

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \simeq \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2}\right)dx$$

1 $$= \left[1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10}$$

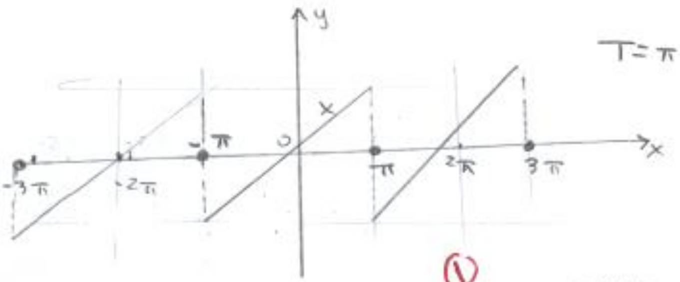
$$= \frac{30 - 10 + 3}{30} = \frac{23}{30} \# 0.767$$

السؤال الثالث:

8

$T=\pi$

1)



1

الدالة f مفردية على $(-\pi,\pi)$ إذن

أ)

$$f(x)=x=\sum_{1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\right]_0^{\pi}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\pi\,\frac{\cos(n\pi)}{n}\right]+\frac{2}{\pi n^2}\left[\cancel{\sin nx}\right]_0^{\pi}$$

2 $\boxed{b_n=\frac{-2(-1)^n}{n}}$

$$f(x)=x=\sum_{1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\ ,\ -\pi<x<\pi$$

ب) لنأخذ $x=\frac{\pi}{2}$ ، لنحصل

$$\pi/2=f(\pi/2)=\sum_{1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi/2)$$ 1

$$\pi/2=\sum_{1}^{\infty}\frac{2(-1)^{2n+1-1}}{2n-1}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)\ ,\ \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)=(-1)^{n-1}$$

$$\frac{\pi}{2}=2\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\Rightarrow\boxed{\frac{\pi}{4}=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}}$$

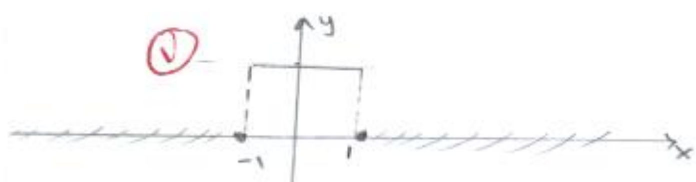
أو

$$\boxed{\frac{\pi}{4}=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}}$$

---

2)

1



الدالة f زوجية على $\mathbb{R}$ إذن $B(\alpha)=0$ ،

$$A(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx$$

$$A(\alpha) = \int_{-1}^{1} 2\cos\alpha x\, dx = 4\int_{0}^{1} \cos\alpha x\, dx$$

$$= \frac{4}{\alpha}\left[\sin(\alpha x)\right]_0^1 = \frac{4\sin\alpha}{\alpha} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\alpha)\cos\alpha x\, d\alpha$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{4\sin\alpha}{\alpha}\cos\alpha x\, d\alpha \ ; \quad x \in \mathbb{R}$$

عندما $x=0$ ، لدينا

$$f(0) = 2 = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\alpha}\, d\alpha \quad (1)$$

ومنه

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\alpha}\, d\alpha}$$

السؤال الرابع:

1)

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ ، \ x \neq 0 \ ، \ y \neq 0$$

$$(1)\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{y^2} + \frac{1}{x} \ (1)$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \cancel{\frac{x}{y}} - \cancel{\frac{y}{x}} - \cancel{\frac{x}{y}} + \cancel{\frac{y}{x}} = f(x,y)$$

$$(1)\ \boxed{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0}$$

---

2) (أ)

$$(x^2+4)\,dy = (2x - 8xy)\,dx$$

$$(x^2+4)\,dy = 2x(1-2y)\,dx$$

$$y \neq \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{1-2y}\,dy = \frac{2x\,dx}{x^2+4} \ (2)$$

$$\boxed{\frac{-1}{2}\ln|1-2y| = \ln(x^2+4) + C} \ (1)$$

(ب)

$$xy\,y' = (x^2+2y^2) \ ; \quad y>0 \ , \ x>0$$

نفرض ان $u = y/x$ ،،

$$(1)\ y' = u + xu' \ , \ y = xu$$

$$\frac{y}{x}y' = 1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 \ , \quad u(u+xu') = 1+2u^2$$

$$u^2 + xu'u = 1 + 2u^2$$

. . . .

(1) $x u \frac{du}{dx} = 1 + u^2$

(1) $\frac{u\,du}{1+u^2} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln x + c$

$c_1 = 2c$ حيث ، $\boxed{\ln(1 + y^2/x^2) = 2\ln x + c_1}$ ،1

---

(٤)

$$y\,dx + (3 + 3x - y)\,dy = 0$$

$$M = y, \quad N = 3 + 3x - y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3, \quad g(y) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{2}{y}$$

(1) $\mu(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = y^2$

$$y^3 dx + (3y^2 + 3xy^2 - y^3)\,dy = 0$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$ المعادلة أصبحت تامة :

إذاً توجد دالة F في x و y بحيث يكون

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^3$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + 3xy^2 - y^3$$

(1) $F(x,y) = \int y^3 dx = y^3 x + \phi(y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 x + \phi'(y) = 3y^2 + 3xy^2 - y^3$

$$\phi'(y) = 3y^2 - y^3 \Rightarrow \phi(y) = y^3 - \frac{1}{4}y^4 + c$$

(1) إذاً حل المعادلة التفاضلية هو مجموعة المنحنيات التالية

$$\boxed{F(x,y) = y^3 x + y^3 - \frac{1}{4}y^4 + c = 0}$$

---

(٦)

$$x y' + (3x + 1) y = e^{-3x}$$

ومنه $y' + \left(3 + \frac{1}{x}\right) y = \frac{1}{x} e^{-3x}$ (1)

(1) $\mu(x) = e^{\int (3 + \frac{1}{x}) dx} = e^{3x + \ln x} = x e^{3x}$

$y\,\mu(x) = y x e^{3x} = \int x e^{3x} \cdot \frac{1}{x} e^{-3x} dx = \int dx$

(1) $\boxed{y x e^{3x} = x + c}$

---

(٥)

معادلة برنولي $y' - y = e^{2x} y^3$

$y^{-3} y' - y^{-2} = e^{2x}, \quad u = y^{-2}, \quad u' = -2 y^{-3} \cdot y'$ (1)

$-\frac{u'}{2} - u = e^{2x}, \quad u' + 2u = -2e^{2x}, \quad \mu(x) = e^{2x}$ (1)

$u e^{2x} = \int -2 e^{2x} \cdot e^{2x} dx = -2 \int e^{4x} dx$

(1) $u e^{2x}$ ...