للقيمة المميزة الغالبة λ_1 و c_1 كما ورد في العلاقة (١٠) .

(٥) أثناء القيام بتجارب مخبرية على مجموعة من الأرانب تبين ما يلي :

(أ) نصف الأرانب يموت في السنة الأولى ويموت نصف المتبقي في السنة الثانية والباقي يموت مع نهاية السنة الثالثة .

(ب) لا تلد الأرانب في السنة الأولى ، متوسط عدد المواليد خلال السنة الثانية هو 6 ومتوسط عدد المواليد خلال السنة الثالثة هو 8 .

إذا علمت أن المختبر يحتوي الآن على 24 أرنباً عمر كل منها أقل من عام ، 24 أرنباً عمر كل منها أكثر من عام وأقل من عامين و 20 أرنباً عمر كل منها بين عامين وثلاثة أعوام فاحسب :

(أ) متجه التوزيع السكاني الإبتدائي .

(ب) مصفوفة لسلي .

(جـ) عدد الأرانب في كل فترة عمرية بعد عام واحد وبعد عامين .

(د) القيمة المميزة الغالبة لمصفوفة لسلي وبعد الفضاء المميز المقابل لها .

أجوبة وإرشادات لبعض التمارين

تمارين (١ ، ١)

(٦) $4E-2D=\begin{bmatrix}22 & 2 & 8\\ -2 & 4 & 6\\ 10 & 0 & 4\end{bmatrix}$ (١٥) $(D-E)^T=\begin{bmatrix}-5 & 0 & -1\\ 4 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

(٢٤) $C^TA^T+2E^T=\begin{bmatrix}15 & 3 & 12\\ 14 & 0 & 7\\ 12 & 12 & 13\end{bmatrix}$ ، ولذا

$$tr\left(C^TA^T+2E^T\right)=15+0+13=28$$

(٣١) $A=\dfrac{-21}{4}B$

(٣٢) $B+A=A\Rightarrow B+A+(-A)=A+(-A)\Rightarrow B+0=0\Rightarrow B=0$

(٣٧) $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\ c(a+d) & cb+d^2\end{bmatrix}$.

ولذا $A^2=I$ إذا وفقط إذا كان $a^2+bc=1$ ، $b(a+d)=0$ ، $c(a+d)=0$ و $cb+d^2=1$

وبحل هذه المعادلات نجد أن جميع المصفوفات A هي :

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ c & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1 & 0\\ c & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a & b\\ \dfrac{1-a^2}{b} & -a\end{bmatrix}$$ حيث $b\neq 0$.

(٤١) $AB-BA=I\Rightarrow tr(AB-BA)=tr\,I=2$

$$\Rightarrow tr(AB)-tr(BA)=2$$
$$\Rightarrow tr(AB)-tr(AB)=2$$
$$\Rightarrow 0=2$$

وهذا مستحيل .

(٤٢) إذا كان $BC=I$ فإن $0=ABC=AI=A$. وهذا مستحيل .

(٤٨) بما أن $AA^{T}=0$ فإن $tr(AA^{T})=0$. ولكن $tr(AA^{T})$ هو مجموع مربعات عناصر A وهذا مستحيل إلا إذا كان $A=0$.

تمارين (٢ ، ١)

(٥) $\begin{bmatrix}1&3&0&4&2&0\\0&0&1&2&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$. (٧) $\begin{bmatrix}1&0&*\\0&1&\frac{-11}{13}\end{bmatrix}$. (٩) $\begin{bmatrix}1&0&-5&-5\\0&1&2&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$.

تمارين (٣ ، ١)

(٧) $AB=AC\Rightarrow A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC)\Rightarrow B=C$

(٨) $(A^2-3A+I)=0\Rightarrow A^{-1}(A^2-3A+I)=0\Rightarrow A^{-1}=3I-A$.

(١١) $(AB)^2=A^2B^2\Rightarrow ABAB=AABB$

$$\Rightarrow A^{-1}ABABB^{-1}=A^{-1}AABBB^{-1}\Rightarrow BA=AB$$

(١٣)

(أ) $A(I+BA)=AI+ABA=(I+AB)A$.

(ب) $(I+BA)B=IB+BAB=B(I+AB)$.

(جـ) $(I+BA)\left(I-B(I+BA)^{-1}A\right)=I+BA-(I+BA)B(I+AB)^{-1}A$

$=I+BA-B(I+AB)(I+AB)^{-1}A=I+BA-BA=I$

وبالمثل $\left(I-B(I+AB)^{-1}A\right)(I+BA)=I$. ولذا فإن :

$(I+BA)^{-1}=I-B(I+AB)^{-1}A$.

تمارين (٤ ، ١)

(١)

(أ) $(AB+BA)^{T}=(AB)^{T}+(BA)^{T}=B^{T}A^{T}+A^{T}B^{T}$

$=BA+AB=AB+BA$

(ب) $(AB-BA)^{T}=BA-AB=-(AB-BA)$

(جـ) بما أن AB متماثلة فإن $AB=(AB)^{T}=B^{T}A^{T}=BA$. وبالعكس ، إذا كان $AB=BA$ فإن $(AB)^{T}=AB$.

(١٠) $A^{*}(A^{-1})^{*}=(\overline{A})^{T}(\overline{A^{-1}})^{T}=(AA^{-1})^{T}=I$. وبالمثل $(A^{-1})^{*}A^{*}=I$. إذن ، $(A^{*})^{-1}=(A^{-1})^{*}$.

(١٢) $(A+A^{*})^{*}=A^{*}+(A^{*})^{*}=A^{*}+A$.

$(A-A^{*})^{*}=A^{*}-(A^{*})^{*}=A^{*}-A=-(A-A^{*})$.

تمارين (١ ، ٢)

(١) -7 (٢) 0 (٣) 33 (٤) 18 (٥) 0 (٦) -51

(٩) $k=-1,2$ (١٠) $k=-1$ (١١) $k=-2,3,4$ (١٢) $\lambda=\frac{3\pm\sqrt{33}}{4}$.

(١٣) 1 (١٧) $\det(5A)=25\det A$.

تمارين (٢ ، ٢)

(١) 52 (٢) 0 (٣) 9 (٤) 336 (٥) -18 (٦) -80

(٧) -770 (٨) 16 (٩) -18 (١٠) 156

(١٩) $\det(5A^2A^{T})=5^4(\det A)^2(\det A^{T})=5^4\times3^2\times3=16875$.

(٢١) $\det(ABA^{T}B^{-3}A^2B^{T})=\frac{(\det A)^4}{\det B}=\frac{-1}{2}\times3^4$.

(٢٢) $\det(A^3+5A^2+6A)=\det A\det(A^2+5A+6)=0$.

(٢٣) $\det A^3 = \det I = 1 \Rightarrow \det A = 1$ (٢٤) خاطئة

(٢٥) $\det A^2 = \det A \det A = 7 \Rightarrow \det A = \pm\sqrt{7} \neq 0$. ولذا فإن للمصفوفة A معكوسا .

تمارين (٣ ، ٢)

(١) $A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = (\det A)I = -45I$. ولذا فإن :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{adj} A) = \frac{-1}{45}\begin{bmatrix} 9 & 9 & -9 \\ 12 & -13 & 3 \\ -24 & 11 & -6 \end{bmatrix}.$$

(٢) $A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = (\det A)I = 17I$. ولذا فإن :

$$A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & 8 & -13 \\ -7 & 5 & -16 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

(٣) $A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = (\det A)I = 252I$. ولذا فإن :

$$A^{-1} = \frac{1}{252}\begin{bmatrix} -72 & -18 & 54 \\ 22 & -19 & 15 \\ 16 & 32 & -12 \end{bmatrix}.$$

(٤) $A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = (\det A)I = 21I$.

(٥) $(\det A)I = 18I$ (٦) $(\det A)I = -24I$.

تمارين (٤ ، ٢)

(١) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (٦) استخدم الاستقراء الرياضي على m

(٧) (أ) $A^n = 0$ لكل $n \geq 4$ ولذا فإن :

$$B = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 = \begin{bmatrix} 0 & a & \frac{1}{2}a^2 & \frac{1}{3}a^3 \\ 0 & 0 & a & \frac{1}{2}a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ب) $B^n = 0$ لكل $n \geq 4$. ولذا فإن $B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 = A$.

(٨) كل من A^2 ، B^2 ، $AB + BA$ متماثلة ، $AB - BA$ متماثلة تخالفيا ، $A^m B^k A^m$ متماثلة إذا كان k زوجي و متماثلة تخالفيا إذا كان k فردي .

(١٠) $\det A = 4x + 2 \neq 0$. ولذا فإن $x \neq \frac{-1}{2}$.

(١١) (أ) $B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. (ب) $B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 9a & 0 & 0 \\ 0 & 9b & 0 \\ 0 & 0 & 9c \end{bmatrix}$

(جـ) $\det A = \det(B^{-1}AB) = \det B^{-1} \det A = \det B = 3^6 abc$.

(١٣) $(x + 3a)(x - a)^3 = 0$. ولذا فإن $x = a$ أو $x = -3a$.

(١٤) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B - A & A - B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + B & B \\ 0 & A - B \end{vmatrix}$

$$= \left|\begin{bmatrix} I & B \\ 0 & A - B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A + B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} I & B \\ 0 & A - B \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A + B & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix}$$

$= \det(A - B)\det(A + B)$

(١٨) $\det(A^2 B^{-1} A^T B^3) = (\det A)^3 (\det B)^2 = 2^3(-2)^2 = 32$

(٢٢) $\det(AB + A^2 C) = \det A(\det(B + AC)) = 0$.

تمارين (٣ ، ١)

(١) $S=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$ (٢) $S=\left\{\left(1,\frac{1}{2}\right)\right\}$ (٣) النظام غير متسق

(٤) $S=\{(38+22t,-16-9t,t):t\in\mathbb{R}\}$ (٥) النظام غير متسق

(٦) $S=\{(2,1,-1)\}$ (٧) $S=\{(t-1,2s,s,t):s,t\in\mathbb{R}\}$

(١٢) $S=\left\{\left(1+\frac{1}{3}t,-1+\frac{7}{3}t,t\right):t\in\mathbb{R}\right\}$ (١٣) $S=\left\{\left(\frac{6}{13},-\frac{17}{13}\right)\right\}$

(١٥) $S=\left\{\left(-3r-4s-2t,r,-2s,s,t,\frac{1}{3}\right):r,s,t\in\mathbb{R}\right\}$

(١٦) $a=b+c$ (١٩) $a=2$ أو $a=\frac{-3}{2}$ (عدد لا نهائي) ، لا يوجد حل ما عدا ذلك .

(٢١) $S=\left\{\left(\frac{5}{9},9,\frac{1}{3}\right)\right\}$

(٢٤) يكون النظام متسقا إذا كان $3a+2b+2c+d=0$ وهذا مستحيل لأن $a,b,c,d>0$

ولذا لا يوجد حل .

(٢٥) (ب) $S=\left\{\left(\frac{20}{9}-\frac{1}{6}t,-\frac{4}{9}-\frac{2}{3}t,t\right):t\in\mathbb{R}\right\}$

(جـ) $S=\left\{\left(-\frac{2}{9}-\frac{1}{2}t,t,\frac{40}{63}\right):t\in\mathbb{R}\right\}$

(٢٦) $S=\{(24+3t,4-2t+1,4+5t+2,4,t):u,t\in\mathbb{R}\}$.

(٢٧) (ب) $b_1=b_3+b_4$ و $b_2=2b_3+b_4$.

تمارين (٣ ، ٢)

(١) $a=-3$ ، $S=\{(9t,-5t,t)\}$.

(٤) $a=1$ ، $S=\{(-t,t,0):t\in\mathbb{R}\}$ أو $a=-1$ ، $S=\{(t,0,t):t\in\mathbb{R}\}$.

(٦) $(-3t,3t,t)=t(-3,3,1)$

(٨) $s(-7,-3,1,0,0)+t(-13,-10,0,0,1)$

(٩) $s(-7,15,7,2,0)+t(-7,17,9,0,4)$

(١٠) $r(7,9,1,0,0)+s(-4,-5,0,1,0)+t(5,6,0,0,1)$

تمارين (٣ ، ٣)

(١) (أ) $x=\frac{-13}{22},y=\frac{30}{11}$. (ب) $x=\frac{14}{17},y=\frac{30}{17}$.

(٢) $x=1,y=\frac{1}{7},z=\frac{6}{7}$. (٣) (أ) $x=-11,y=\frac{5}{2},z=\frac{-23}{2}$.

(٤) $x_1=a,x_2=1,x_3=-1$. (٥) $y=\frac{705}{338},z=\frac{107}{337}$.

(٦) $x=\frac{-3}{4}$. (٧) $z=\frac{-2}{79},y=\frac{-37}{79},x=\frac{12}{79}$. (٨) $x_3=3$.

(٩) $x_1=1,x_2=0,x_3=2,x_4=0$.

(١٠) $x_1=x\cos\theta+y\sin\theta\ ,\ \ y_1=-x\sin\theta+y\cos\theta$.

(١١) لا ، يوجد عدد غير منته من الحلول .

(١٢) (أ) $a\neq\pm2$ ، $y=\frac{a+8}{(a+2)(a-2)}$ ، $x=\frac{4a+2}{3(a+2)(a-2)}$.

(ب) $a\neq\pm\sqrt{3}$, $y=\frac{-4a-15}{4(a^2-3)}$, $x=\frac{5a+4}{6(a^2-3)}$.

تمارين (٤ ، ١)

(١) ليست فضاء متجهات (٢) ليست فضاء متجهات (٣) فضاء متجهات (٤) ليست فضاء متجهات

(٥) فضاء متجهات (٦) فضاء متجهات (٧) ليست فضاء متجهات (٨) ليست فضاء متجهات

(٩) ليست فضاء متجهات (١٠) فضاء متجهات (١١) ليست فضاء متجهات (١٢) ليست فضاء متجهات

(١٣) ليست فضاء متجهات (١٤) فضاء متجهات (١٥) فضاء متجهات (١٦) ليست فضاء متجهات

(١٧) فضاء متجهات (١٨) ليست فضاء متجهات (١٩) فضاء متجهات (٢٠) ليست فضاء متجهات

تمارين (٢ ، ٤)

(١) فضاء جزئي	(٢) فضاء جزئي	(٣) ليست فضاء جزئي	(٤) ليست فضاء جزئي
(٥) فضاء جزئي	(٦) فضاء جزئي	(٧) فضاء جزئي	(٨) ليست فضاء جزئي
(٩) ليست فضاء جزئي	(١٠) فضاء جزئي	(١١) فضاء جزئي	(١٢) ليست فضاء جزئي
(١٣) ليست فضاء جزئي	(١٤) ليست فضاء جزئي	(١٥) فضاء جزئي	(١٦) ليست فضاء جزئي
(١٧) فضاء جزئي	(١٨) فضاء جزئي	(١٩) فضاء جزئي	(٢٠) فضاء جزئي
(٢١) فضاء جزئي	(٢٢) فضاء جزئي	(٢٣) فضاء جزئي	(٢٤) فضاء جزئي
(٢٥) فضاء جزئي	(٢٦) ليست فضاء جزئي	(٢٧) فضاء جزئي	(٢٨) ليست فضاء جزئي
(٢٩) فضاء جزئي	(٣٠) فضاء جزئي		

تمارين (٣ ، ٤)

(١) $3(1,-1,1)+2(1,0,1)-4(1,1,0)$.

(٢) $-2(2,1,4)+(1,-1,3)-2(3,2,5)$.

(٣) $0(2,1,0,3)+0(1,-1,3)+0(3,2,5)$.

(٤) $2(2,1,0,3)-(3,-1,5,2)-(-1,0,2,1)$.

(٥) $1+x^2=\frac{1}{3}(1-x)+\frac{1}{3}(2+x+3x^2)$.

(٦) $2x^2-3x+1=-3(x+1)+0(x^2+x)+2(x^2+2)$.

(٧) $9x^2+8x+7=0(4x^2+x+2)-2(3x^2-x+1)+3(5x^2+2x+3)$.

(٨) $A=5A_1-A_2+0A_3$. (٩) $A=A_1+2A_2-3A_3$.

(١٠) $\mathbf{w}\in\langle S\rangle$ لأن $\mathbf{w}=2\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$. (١١) $\mathbf{w}\in\langle S\rangle$ لأن $\mathbf{w}=2\mathbf{v}_1+2\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3$.

(١٢) (أ) $\mathbf{w}_1\in\langle S\rangle$ (ب) $\mathbf{w}_2\notin\langle S\rangle$. (١٣) $p(x)\notin\langle S\rangle$.

(١٤) $p(x)\in\langle S\rangle$ لأن $p(x)=4p_1(x)-5p_2(x)+p_3(x)$.

(١٥) كل من $\cos 2x$ و 1 ينتمي إلى $\langle S\rangle$ ولكن x^2+3 و $\sin x$ لا ينتميان إلى $\langle S\rangle$.

(١٦) $A\in\langle S\rangle$ لأن $A=3A_1-A_2$.

(١٧) (أ) $\langle S_1\rangle=\mathbf{R}^3$ (ب) $\langle S_2\rangle=\mathbf{R}^3$ (جـ) $\langle S_3\rangle\neq\mathbf{R}^3$.

(١٨) (أ) $\langle S_1\rangle=\mathbf{P}_2$ (ب) $\langle S_2\rangle\neq\mathbf{P}_2$ (جـ) $\langle S_3\rangle=\mathbf{P}_2$.

(١٩) (أ) $\langle S_1\rangle=\mathbf{M}_{22}$ (ب) $\langle S_2\rangle\neq\mathbf{M}_{22}$.

(٢٠) (أ) لا (ب) نعم (جـ) لا .

(٢١) (أ) $\alpha_1=-\beta_1=\beta_2$ و $\alpha_2=-2\beta_1$

(٢٣) (أ) $\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_1x-\alpha_2x^2$ (جـ) $5\beta_3=-\beta_4$.

تمارين (٤ ، ٤)

(١) مستقلة خطيا	(٢) مستقلة خطيا	(٣) مستقلة خطيا	(٤) مرتبطة خطيا	(٥) مرتبطة خطيا
(٦) مرتبطة خطيا	(٧) مرتبطة خطيا	(٨) مرتبطة خطيا	(٩) مستقلة خطيا	(١٠) مرتبطة خطيا
(١١) مرتبطة خطيا	(١٢) مستقلة خطيا	(١٣) مرتبطة خطيا	(١٤) مستقلة خطيا	(١٥) مستقلة خطيا
(١٦) مرتبطة خطيا	(١٧) مستقلة خطيا	(١٨) مستقلة خطيا	(١٩) مرتبطة خطيا	(٢٠) مستقلة خطيا

(٢١) (ب) $x\neq-\frac{1}{3}$.

تمارين (٥ ، ٤)

(١) كل من (أ) ، (ب) و (د) أساس . (٢) كل من (ب) ، (جـ) و (د) أساس . (٣) كل من (جـ) و (د) أساس .

(٤) كل من (أ) و (د) أساس . (٥) كل من (ب) ، (جـ) و (د) أساس . (٦) (ب) $\{(-1,1,-1)\}$ ،

(هـ) $\{(-1,1,-1,0),(0,0,-1,1)\}$ (ز) $\left\{\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$

(ي) $\{x-x^2,1\}$

(٧) (أ) $\{(-1,7,10)\}$ (ب) $\{(-1,5,4,0),(1,7,0,-4)\}$

(جـ) $\left\{\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},1,0\right),(0,-1,0,1)\right\}$ (د) $\{(4,-5,1)\}$

(هـ) $\{(3,5,1,0),(-2,-4,0,1)\}$ (و) $\{(-3,-2,-1,1)\}$

(ز) $\{(-1,1,0,0,0),(0,0,-1,1,0),(-1,0,0,0,1)\}$

(٨) (د) $\{(0,0,1,1),(1,1,1,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$

(هـ) $\{x^2+1,x^2+x,1,x^3\}$

(٩) (د) $\{(1,2),(1,3)\}$ (هـ) $\{(-1,1,0),(1,0,-1),(0,1,1)\}$

(و) $\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,1,0)\}$

(ز) $\{x^2+x-1, 2x^2-3, 3x+1\}$

(١٣) مستحيل ، كثيرات الحدود هذه تولد فضاءا جزئيا أساسه $\{x-1, x^2-1, x^3-1\}$.

(١٤) (أ) أساس وكل من (ب) ، (جـ) و (د) ليست أساس .

(١٥) يمكن أن تولد $\mathbb{R}^3$ ولكن لا يمكن أن تكون أساس .

تمارين (٦ ، ٤)

(١) (د) $\begin{bmatrix} a \\ 2b-c \\ c-b \end{bmatrix}$ (هـ) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} a-b \\ a+b \\ -a+3b+2c \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(٣) ${}_{C}P_{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ، $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$ ، $[\mathbf{v}]_C = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$.

(٥) ${}_{C}P_{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{-3}{4} & \frac{-17}{12} & \frac{-17}{12} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ، $[\mathbf{v}]_C = \begin{bmatrix} \frac{19}{12} \\ \frac{-43}{12} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$.

(٧) ${}_{C}P_{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ، ${}_{B}P_{C} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$ ، $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $[\mathbf{v}]_C = \begin{bmatrix} -\frac{11}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(٩) ${}_{C}P_{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(١١) ${}_{C}P_{B} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، $[\mathbf{v}]_C = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{26}{3} \\ \frac{-13}{3} \\ \frac{-7}{3} \end{bmatrix}$.

(١٦)(ب) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، (جـ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. (١٧)(أ) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

تمارين (٧ ، ٤)

(١) $\text{rank} = 2$ ، $\text{nullity} = 1$ (٣) $\text{rank} = 2$ ، $\text{nullity} = 0$

(٤) $\text{rank} = 2$ ، $\text{nullity} = 1$ (٥) $\text{rank} = 2$ ، $\text{nullity} = 2$

(٦) $\text{rank} = 4$ ، $\text{nullity} = 1$

(٩) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ، $\{[1,0,-1,1]^T, [0,1,2,0]^T, [0,0,2,-1]^T\}$.

(١١) $\{(1,2,-1,3),(0,3,1,1)\}$ ، $\{[1,0]^T, [0,1]^T\}$.

(١٢) $\text{rank}(A) = 6$ ، النظام متسق . (١٣) $\text{rank}(A) = 6$ ، $\text{nullity}(A) = 8-6 = 2$.

(١٤) $\text{nullity } A = 5$ ، $\dim(\text{row}A) = 3$ ، $\text{rank}(A^T) = 3$.

(١٥) $\dim \text{col}(A) = 2$ (١٦) $\dim \text{row}(A) = 3$ (١٧) 5 (١٨) 5 (١٩) 2

(٢٠)(أ) $\{(1,1,0,0,0),(0,-2,2,5,1),(0,0,2,-3,6)\}$

(ب) $\{[1,5,-6]^T, [0,1,-1]^T, [0,0,1]^T\}$

تمارين (٨ ، ٤)

(١) (أ) ليس جمعا مباشرا (ب) جمعا مباشرا (جـ) ليس جمعا مباشرا (د) ليس جمعا مباشرا

(هـ) جمعا مباشرا (و) ليس جمعا مباشرا

(٢) (أ) جمعا مباشرا (ب) جمعا مباشرا (جـ) ليس جمعا مباشرا .

(٣) نعم (٤) لا (٥) نعم

(٧) $\mathbf{W}_1 = \langle \{ (0,0,1,0), (0,0,0,1) \} \rangle$ و

$\mathbf{W}_2 = \langle \{ (1,1,1,1), (1,1,1,-1) \} \rangle$ (اجوبة أخرى ممكنة) .

(١٤) $\mathbf{W}_1 = \langle \{ (1,0,0), (0,1,0) \} \rangle$ ، $\mathbf{W}_2 = \langle \{ (1,0,0), (0,0,1) \} \rangle$

و $\mathbf{W}_3 = \langle \{ (1,0,0), (1,1,1) \} \rangle$ (اجوبة أخرى ممكنة) .

تمارين (١ ، ٥)

(١) ليست ضربا داخليا (٢) ليست ضربا داخليا (٣) ضربا داخليا (٤) ليست ضربا داخليا

(٥) ليست ضربا داخليا (٦) ليست ضربا داخليا (٧) ليست ضربا داخليا (٨) ليست ضربا داخليا

(١٠) ليست ضربا داخليا (١٢) ليست ضربا داخليا (١٣) ليست ضربا داخليا (١٤) ليست ضربا داخليا

(١٥) ليست ضربا داخليا .

تمارين (٢ ، ٥)

(١) $\cos\theta = 0$ والمتجهان متعامدان (٣) $\cos\theta = \dfrac{-4}{\sqrt{194}}$ (٥) $\cos\theta = -1$

(٧) $\cos\theta = \dfrac{27}{\sqrt{13770}}$ (٩) $\cos\theta = \dfrac{5}{6}$ (١١) $\cos\theta = \dfrac{37}{\sqrt{1860}}$

(١٣) $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$ (١٥) $\cos\theta = \dfrac{27}{\sqrt{2580}}$ (١٧) $\cos\theta = 0$ والمتجهان متعامدان

(١٩) $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{175}}$ (٢٢) $\cos\theta = 0$ والمتجهان متعامدان .

(٣٠) $\|\mathbf{u}\| = \|(\mathbf{u}-\mathbf{v})+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|$.

(٣١) $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \langle \mathbf{u},\mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u},\mathbf{v} \rangle - \|\mathbf{v}\|^2 = 0$

(لأن $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$) .

تمارين (٣ ، ٥)

(١) (أ) $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}} \right), \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right) \right\}$ (ب) $\{ (1,0), (0,-1) \}$

(٣) (أ) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) \right\}$

(ب) $\left\{ (1,0,0), \frac{1}{\sqrt{53}}(0,7,-2), \frac{1}{\sqrt{53}}\left(0,2,\frac{7}{\sqrt{53}}\right) \right\}$

(٤) (جـ) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,0) \right\}$

(٥)

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1,0), \frac{1}{\sqrt{30}}(5,-1,2,0), \frac{1}{\sqrt{10}}(1,1,-2,-2), \frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,-2,3) \right\}$$

(٧) (أ) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{3}(-1,-1,2) \right\}$

(ب) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2), \left(\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}} \right) \right\}$

(٩) (أ) $\left\{ (1,-1,0,1), (1,1,0,0), \frac{1}{3}(-1,1,0,2) \right\}$

(ب) $\left\{ (1,1,-1,-1), (2,1,1,2), \frac{1}{10}(4,-3,7,-6) \right\}$

(١١) (ب) $\left\{ 1, x-1, x^2-2x+\frac{2}{3} \right\}$ (١٢) $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x \right\}$

(١٣) $\left\{ 1, \dfrac{\sqrt{2}\left(e^x - e + 1\right)}{\sqrt{4e - e^2 - 3}} \right\}$ (١٤) $\{ 1, x, 3x^2 - 1 \}$

(١٥) $\{ 1, x, x^2-2, -17x+5x^3, 72-155x^2+35x^4 \}$

(١٧) (أ) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) \right\}$

(ب) $\left\{ \frac{1}{5}(3,0,4), \frac{1}{\sqrt{850}}(-12,25,9), \frac{1}{\sqrt{34}}(4,3,-3) \right\}$

تمارين (٤ ، ٥)

(١) $\mathbf{v} = \left(-\frac{2}{5}, 2, \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{14}{5}\right)$ (٢) $\mathbf{v} = \left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right) + \left(-\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

(٣) $\mathbf{v} = (2,4,0,0,) + (2,-1,3,-1)$

(٤) $\mathbf{v} = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + \left(1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(٥) $\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 1\right) + \left(\frac{6}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 0\right)$

(٦) $\mathbf{v} = \left(x + \frac{6}{5}\right) + \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$

تمارين (١ ، ٦)

(١) تحويل خطي (٢) تحويل خطي (٣) تحويل خطي (٥) تحويل خطيَ (٦) تحويل خطي (٧) تحويل خطي
(١٠) تحويل خطي (١٣) ليس تحويلا خطيا (١٦) تحويل خطي (١٧) تحويل خطي (١٨) تحويل خطي
(٢٠) تحويل خطي (٢١) تحويل خطي (٢٢) تحويل خطي (٢٣) تحويل خطي (٢٤) ليس تحويلا خطيا
(٢٧) تحويل خطي (٢٨) تحويل خطي (٣٠) ليس تحويلا خطيا (٣٤) تحويل خطي (٣٨) ليس تحويلا خطيا
(٤٠) تحويل خطي (٤٢) ليس تحويلا خطيا (٤٣) تحويل خطي

(٤٤) $T(x,y) = (-4x+5y, x-3y)$.

(٤٥) $T(x,y) = \frac{1}{3}(x-y, 3y, x-y)$.

(٤٧) $T(2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3) = (-10,-7,6)$.

(٥٠) $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 3a - 3c + 2b$.

(٥١) (ب) $T(\mathbf{v}) = \frac{1}{3}(7\mathbf{v} - 9\mathbf{w}), T(\mathbf{w}) = \frac{1}{3}(\mathbf{v} + 3\mathbf{w})$.

(٥٢) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ (٥٤) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ (٥٦) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (٥٧) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(٦٢) (ب) خذ $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y) = (x,0)$.

تمارين (٢ ، ٦)

(١) $\ker T = \{(24,-12,4,1)t : t \in \mathbb{R}\}$, $\text{nullity}\, T = 1$,
$\text{Im}T = \{(r,s,t) : r,s,t \in \mathbb{R}\}$, $\text{rank}T = 3$.

(٤) $\ker T = \{(-1,2,1)t : t \in \mathbb{R}\}$, $\text{nullity}\, T = 1$,
$\text{Im}T = \{(s,t,s-t,s-2t) : s,t \in \mathbb{R}\}$, $\text{rank}T = 3$

(٨) $\ker T = \{(-3s+t, 7s+t, s, -t) : s,t \in \mathbb{R}\}$, $\text{nullity}\, T = 2$
$\text{Im}T = \{(s,t,s-t) : s,t \in \mathbb{R}\}$, $\text{rank}T = 2$

(١٠) $\ker T = \{(-s,2s,s) : s \in \mathbb{R}\}$, $\text{nullity}\, T = 1$
$\text{Im}T = \{(s,t,s-t,s-2t) : s,t \in \mathbb{R}\}$, $\text{rank}T = 2$.

(١٢) $\ker T = \{(-t-s-2r, 6t-2s, r, s, t) : r,s,t \in \mathbb{R}\}$, $\text{nullity}\, T = 3$
$\text{Im}T = \{(17s, 17t, 18s-5t) : s,t \in \mathbb{R}\}$, $\text{rank}T = 2$.

(١٣) $\ker T = \{(-2s+t, 5+2t, s, -4t, t) : s,t \in \mathbb{R}\}$, $\text{nullity}\, T = 2$
$\text{Im}T = \{(s+2t+r, 2s+t+r, -s, 2t) : s,t,r \in \mathbb{R}\}$, $\text{rank}T = 3$.

(١٦) $\ker T = \left\{ t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : t,s \in \mathbb{R} \right\}$, $\text{nullity}\, T = 2$

$\text{Im}T = \left\{ t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} t,s \in \mathbb{R} \right\}$, $\text{rank}T = 2$.

(١٧) $\ker T = \left\{ s\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : t,s \in \mathbb{R} \right\}$, $\text{nullity}\, T = 2$.

(٢١) $\ker T=\{a(x^2-x):a\in\mathbb{R}\}$, $\text{nullity}\,T=1$ ، $\operatorname{Im}T=\{(s,t):s,t\in\mathbb{R}\}$, $\operatorname{rank}T=2$.

تمارين (٣ ، ٦)

(١) تماثل (٢) $\ker T=\left\{\left(-\frac{3}{2}t,t\right):t\in\mathbb{R}\right\}\neq\{0\}$

(٣) $\ker T=\{(t,t):t\in\mathbb{R}\}\neq\{0\}$. (٤) $\ker T=\{(0,t,-t):t\in\mathbb{R}\}\neq\{0\}$.

(٥) تماثل (٦) تماثل (٧) تماثل (٨) $\ker T\neq\{0\}$

(٩) تماثل ،

$T^{-1}=(x,y,z)=(4x-2y-3z,-11x+6y+9z,-12x+7y+10z)$.

(١٠) تماثل ، $T^{-1}=(x,y,z,t)=(y-x,-x,z,-t)$.

(١١) (أ) $\det A=6$ ولذا فإن T_A تماثل (ب) $\det A=-1$ ولذا فإن T_A تماثل

(جـ) $\det A=0$ ولذا فإن T_A ليس تماثل .

(١٢) (أ) $\det A=0$ ولذا فإن T_A ليس تماثل (ب) $\det A=15$ ولذا فإن T_A تماثل

(جـ) $\det A=1$ ولذا فإن T_A تماثل .

(١٣) $\ker T=\{0\}$ ، تماثل . (١٤) $\ker T=\{0\}$ ، تماثل .

(١٥) $\ker T=\{0\}$ ، تماثل ، $T^{-1}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3a-2c & 3b-2d\\ a+c & b+d\end{bmatrix}$

(١٦) تماثل ، (١٧) تماثل ، $T^{-1}(a,b,c)=\frac{1}{2}\left[2a+(b-c)x-(2a-b-c)x^2\right]$

(١٨) تماثل ، $T^{-1}(p(x))=p(x+3)$ (١٩) تماثل ، (٢٠) تماثل .

تمارين (٤ ، ٦)

(١) $\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ -5 & 6 & 4\end{bmatrix}$.

(٢) (أ) $T(\mathbf{v}_1)=-\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_3$ ، $T(\mathbf{v}_2)=-\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_3$ و $T(\mathbf{v}_3)=\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2$.

(ب) $[T(\mathbf{v}_1)]_B=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix},[T(\mathbf{v}_2)]_B=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}\ [T(\mathbf{v}_3)]_B=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ (٤) (أ) $[T]_B=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1 & 5\\ -3 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 4 & 0\\ 0 & -5 & 0 & -1\end{bmatrix}$

(ب) $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 5 & 1\end{bmatrix}$ (جـ) $[T]_C=\begin{bmatrix}0 & -10 & 26 & 5\\ -2 & -23 & 57 & 11\\ 7 & 37 & -79 & -16\\ -32 & -246 & 535 & 107\end{bmatrix}$

(د) $T(\mathbf{v}_1)=-2\mathbf{v}_2+7\mathbf{v}_3-32\mathbf{v}_4$

$T(\mathbf{v}_2)=-10\mathbf{v}_1-23\mathbf{v}_2+37\mathbf{v}_3-246\mathbf{v}_4$

$T(\mathbf{v}_3)=26\mathbf{v}_1+57\mathbf{v}_2-79\mathbf{v}_3+535\mathbf{v}_4$

$T(\mathbf{v}_4)=5\mathbf{v}_1+11\mathbf{v}_2-16\mathbf{v}_3+107\mathbf{v}_4$

(٦) $[T]_B=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ (٧) $[T]_B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(٩) (أ) $[T(\mathbf{v}_1)]_B=\begin{bmatrix}1\\2\\6\end{bmatrix}$ ، $[T(\mathbf{v}_2)]_B=\begin{bmatrix}3\\0\\-2\end{bmatrix}$ و

$[T(\mathbf{v}_3)]_B=\begin{bmatrix}-1\\5\\4\end{bmatrix}$.

(ب) $T(\mathbf{v}_1)=16+51x+19x^2$ ، $T(\mathbf{v}_2)=-16-5x+5x^2$ و

$T(\mathbf{v}_3)=7+40x+15x^2$.

(جـ) $T\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=\dfrac{239a_0-161a_1+289a_2}{24}$

$+\dfrac{201a_0-111a_1+247a_2}{8}x+\dfrac{61a_0-31a_1+107a_2}{12}x^2$

(د) $T\left(1+x^2\right)=22+56x+14x^2$.

(١٠) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (١١) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (١٢) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

(١٣) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (١٤) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (١٥) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(١٨) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (٢١) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

(٢٩) (أ) $T\left(2-x+x^2\right)=10-3x+4x^2+x^3$

(ب) $T[p(x)+q(x)]=(x+5)[p(x)+q(x)]$

$=(x+5)p(x)+(x+5)q(x)=T(p(x))+T(q(x))$

$T(\alpha p(x))=(x+5)(\alpha(p(x)))=\alpha(x+5)p(x)=\alpha T(p(x))$

(جـ) $[T]_B^C=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(٣٠) (أ) $(2,5,8)$ (جـ) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(٣٢) $T\left(e^{2x}\right)=2e^{2x}=2\mathbf{v}_1$ ، $T\left(xe^{2x}\right)=\mathbf{v}_1+2\mathbf{v}_2$ و $T\left(x^2e^{2x}\right)=2\mathbf{v}_2+3\mathbf{v}_3$

$[T]_B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

تمارين (١ ، ٧)

(١) $\lambda_1=5,\lambda_2=-5$ و $E_5=\langle(2,1)\rangle,E_{-5}=\langle(-1,2)\rangle$.

(٢) $\lambda_2=-2,\lambda_1=3$ و $E_{-2}=\langle(1,1)\rangle$ ، $E_3=\langle(4,-1)\rangle$.

(٣) $\lambda_1=\lambda_2=4$ ، $E_4=\langle(\frac{3}{2},1)\rangle$.

(٤) $\lambda_1=\sqrt{12}$ ، $\lambda_2=-\sqrt{12}$ و $E_{\sqrt{12}}=\langle(\frac{3}{\sqrt{12}},1)\rangle$ $E_{-\sqrt{12}}=\langle(\frac{-3}{\sqrt{12}},1)\rangle$.

(٥) $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$ و

$E_1\langle(0,1,0)\rangle,E_2=\langle(-\frac{1}{2},1,1)\rangle,E_3=\langle(-1,1,1)\rangle$

(٦) $\lambda=-8$ و $E_{-8}=\langle(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},1)\rangle$

(٧) $\lambda_1=-4,\ \lambda_2=3$ و $E_{-4}\langle(-2,\frac{8}{3},1)\rangle,E_3=\langle(5,-2,1)\rangle$

(٨) $\lambda_2=\lambda_3=-9,\ \lambda_1=9$ و

$E_{-9}\langle(1,0,4),(0,1,1)\rangle$ ، $E_9=\langle(4,1,-1)\rangle$

(٩) $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\ \lambda_3=-2,\lambda_4=5$ و

$E_1=\langle(3,-1,0,0)\rangle,\ E_2=\langle(0,0,1,1)\rangle$

$E_{-2}=\langle(0,0,1,-1)\rangle,E_5=\langle(1,1,0,0)\rangle$

(١٠) $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2,\lambda_4=-1$ و $E_1=\langle(0,0,0,1),(2,3,1,0)\rangle$,

$E_{-1}=\langle(-2,1,1,0)\ ,\ E_{-2}=\langle(-1,0,1,0)\rangle$.

(١١) $\lambda_1=1,\lambda_2=8$ و $E_1=\langle(-3,1)\rangle, E_8=\langle(1,2)\rangle$.

(١٢) $\lambda_1=0,\lambda_2=2$ و $E_0=\langle(1,-1)\rangle, E_2=\langle(1,1)\rangle$.

(١٣) $\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=-4$ و $E_1=\langle(-1,1,0)\rangle, E_{-2}=\langle(0,1,3)\rangle, E_{-4}=\langle(1,0,1)\rangle$.

(١٤) $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$ و $E_1=\langle(-2,1,1)\rangle, E_2=\langle(-1,0,1),(0,1,0)\rangle$.

(١٥) كما في التمرين (٩) . (١٦) $\lambda=1$ و $E_1=\langle x, 1+x^2\rangle$.

(١٧) $\lambda_1=-4,\lambda_2=3$ و $E_{-4}(T)=\langle -2+\frac{8}{3}x+x^2\rangle$ ، $E_3(T)=\langle 5-2x+x^2\rangle$

(١٨) $\lambda_1=\lambda_2=-2$ ، $\lambda_3=5$ و $E_5(T)=\langle 1+x^2\rangle$ ، $E_{-2}(T)=\langle x, 4-3x^2\rangle$.

(١٩) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ ، $\lambda_4=-1$ و

$$E_1(T)=\left\langle \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\rangle,\ E_{-1}(T)=\left\langle \begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right\rangle .$$

(٢٠) $\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-1$ و

$$E_1(T)=\left\langle \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&3\\1&0\end{bmatrix}\right\rangle,\ E_{-2}(T)=\left\langle \begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}\right\rangle,\ E_{-1}(T)=\left\langle \begin{bmatrix}-2&1\\1&0\end{bmatrix}\right\rangle .$$

(٢٢) $AX=\lambda X$. ولذا فإن

$$A^k X=A^{k-1}(\lambda X)=A^{k-2}(\lambda^2 X)=\cdots=A(\lambda^{k-1}X)=\lambda^k X .$$

(٢٤) $(A-4I)X=AX-4IX=(\lambda X-4IX)=(\lambda-4)X$.

(٢٥) ضع $A=\begin{bmatrix}1&1\\3&-1\end{bmatrix}$. (٢٦) الجذور المركبة تحدث أزواجا .

(٢٨) $AX=\lambda X\Rightarrow A^kX=\lambda^kX\Rightarrow 0X=\lambda^kX\Rightarrow\lambda^k=0\Rightarrow\lambda=0$

(٣٠) لا ، خذ $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$. 1 قيمة مميزة للمصفوفة A ولكن $1+1=2$ ليست قيمة مميزة

(٣٢) (أ) نعلم أن $tr(XA)=tr(AX)$ لأي مصفوفتين X و A . الآن

$$A=P^{-1}BP\Rightarrow tr(A)=tr(P^{-1}BP)$$
$$=tr((P^{-1}B)P)=tr(P(P^{-1}B))=tr(B)$$

(ب) $rank(A)=rank(P^{-1}AP)=rank(AP)=rank\,A$

(٣٧) $\lambda=0$ قيمة مميزة $\Leftrightarrow det(0I-A)=0\Leftrightarrow det\,A=0\Leftrightarrow A$ ليس لها معكوس .

(٣٨) لنفرض أن λ قيمة مميزة لـ A وأن X المتجه المميز المقابل لها .

بما أن A^{-1} موجود فإن $\lambda\neq 0$. الآن :

$$AX=\lambda X\Rightarrow X=A^{-1}AX=A^{-1}\lambda X=\lambda A^{-1}X\Rightarrow\frac{1}{\lambda}X=A^{-1}X .$$

ولذا فإن X متجه مميز للمصفوفة A^{-1} وأن $\frac{1}{\lambda}$ القيمة المميزة المقابلة لها .

(٣٩) $T(e^x)=\frac{d}{dx}(e^x)=e^x=1e^x$.

(٤٠) $T(e^{-2x})=-2e^{-2x}$. ولذا فإن القيمة المميزة المقابلة للمتجه المميز e^{-2x} هي $\lambda=-2$.

تمارين (٧،٢)

(١) $A^4=\begin{bmatrix}226&-525\\90&-209\end{bmatrix}$ (٢) $A^{13}=\begin{bmatrix}-8190&0&-16382\\8191&8192&8191\\8191&0&16383\end{bmatrix}$

(٣) $A^4=\begin{bmatrix}313&-312&0\\-313&-313&0\\0&0&625\end{bmatrix}$ (٦) غير قابلة للاستقطار .

(٧) $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(٨) $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

(٩) $P=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(١٠) $(\lambda-2)(\lambda-3)^2=0$ ، $\dim E_3=1<2$ ، غير قابلة للاستقطار .

(١١) $P=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(١٢) $P=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(١٣) $P=\begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(١٤) غير قابلة للاستقطار . (١٥) غير قابلة للإستقطار

(١٦) غير قابلة للإستقطار (١٧) غير قابلة للإستقطار

(١٨) $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix} -2 & & & O \\ & -2 & & \\ & & 3 & \\ O & & & 3 \end{bmatrix}$.

(١٩) $D=\begin{bmatrix} 5 & & & O \\ & 5 & & \\ & & -3 & \\ O & & & -3 \end{bmatrix}$ ، $P=\begin{bmatrix} -8 & -16 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(٢٢) لنفرض أن A قابلة للاستقطار وأن $D=P^{-1}AP$ هي المصفوفة القطرية . الآن

$$D^T=\left(P^{-1}AP\right)^T=P^TA^T\left(P^T\right)^{-1}$$

مصفوفة قطرية ومن ثم فإن A^T قابلة للاستقطار .

(٢٥) معادلة كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي :

$h(\lambda)=\lambda^2-(a+d)+(ad-bc)^2=0$. ولهذه المعادلة جذران حقيقيان مختلفان إذا وفقط إذا كان $(a+d)^2=4(ad-bc)>0$ إذا وفقط إذا كان $(a-d)^2>-4bc$

ومن ثم نحصل على المطلوب .

(٢٦) لاحظ أن $\det A=\det\left(P^{-1}AP\right)=\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

(٢٧) بما أن A متلاشية القوى فإن القيمة المميزة الوحيدة لها هي $\lambda=0$. لنفرض أن A قابلة للاستقطار . عندئذ يوجد P حيث $D=P^{-1}AP$ و D مصفوفة صفرية . إذن $A=PDP^{-1}=0$ ، وهذا مستحيل .

تمارين (٧،٣)

(١) $P=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ و $P^TAP=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$