Problem 2-2:

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n+a}\ \sqrt{n+b}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{(n+a)(n+b)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+(a+b)n+ab}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2\left(1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left[1-\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}\right]=\infty\cdot 0$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}}{\frac{1}{n}}=\frac{0}{0}$$

نطبق قاعدة لوبيتال :

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{(a+b)\left(-\frac{1}{n^2}\right)+ab\cdot\left(-\frac{2}{n^3}\right)}{2\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}}}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}}+\frac{ab}{n\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}}\right]$$

$$=\frac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{1+0+0}}+\frac{ab}{\infty\sqrt{1}}=\frac{a+b}{2}+0$$

$$=\frac{a+b}{2}$$

Problem 2-2:

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$. For this limit, we will use the following excercise (8), below:

$$a_n = \frac{2^{n^2}}{n!} \to a_{n+1} = \frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!} = \frac{2^{n^2}\cdot 2^{2n}\cdot 2^{1}}{(n+1)\,n!}$$

$(a_n > 0)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2^{n^2}}\cdot 4^n\cdot 2}{(n+1)\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^{n^2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4^n\cdot 2}{n+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

نطبق قاعدة لوبيتال :

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4^n\cdot \ln 4\cdot 2}{1} = \infty$$

$\Rightarrow \left\{\frac{2^{n^2}}{n!}\right\}$ is not bounded $\Rightarrow \left\{\frac{2^{n^2}}{n!}\right\}$ diverges.

8. لتكن $x_n > 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$. إذا كان $L < 1$ ، فأثبت أن $\lim x_n = 0$ باتباع الخطوات التالية:

(i) خذ $L < r < 1$. باستخدام $\varepsilon = r - L$ أثبت وجود $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < r \quad \forall n \geq N$$

(ii) أثبت أن

$$x_n < x_N \cdot r^{n-N} \quad \forall n > N$$

(iii) استنتج أن $x_n \to 0$.

إذا كـــان $L > 1$ فأثبت أن (x_n) غير محدودة وبالتالي غير متقاربة. هات مثالاً لمتتالية متقاربة (x_n) وأخرى غير متقاربة (y_n) بحيث يكون

$$\lim \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$$

9. استخدم نتيجة السؤال رقم 8 لتحسب $\lim x_n$ فيما يلي:

(i) $x_n = \frac{a^n}{3^n}$ حيث $a > 0$

(ii) $x_n = \frac{n!}{2^n}$

(iii) $x_n = \frac{a^n}{n^2}$ حيث $a > 0$

(iv) $x_n = \frac{a^n}{n^n}$.

10. نقـــول إن (x_n) **متقاربة على غرار سيزارو** إذا كانت $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$ متقاربة.

أثـــبت أن كـــل متتالية متقاربة، متقاربة على غرار سيزارو. هات مثالاً لمتتالية