# تمارين مقرر ٣١٦ ريض ( الطرائق الرياضية)

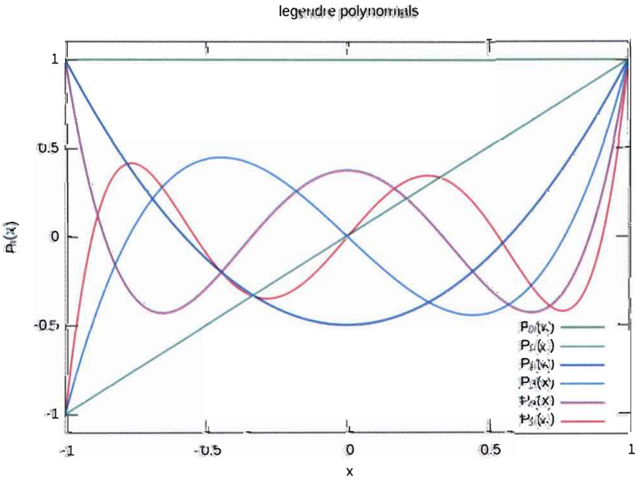
## حل تمارين كتاب:

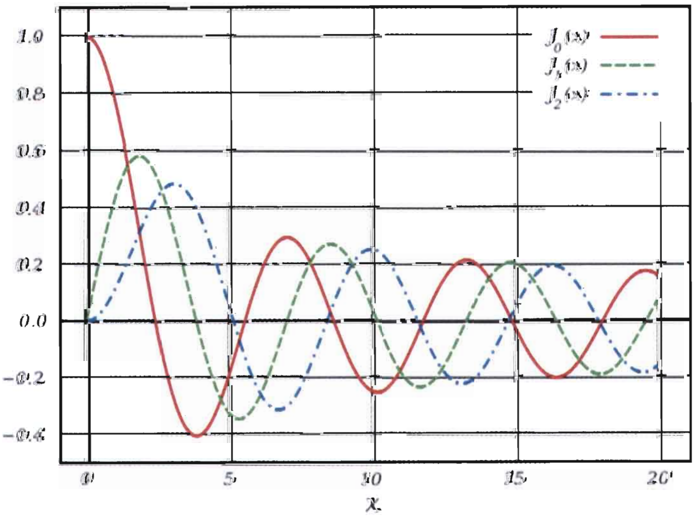
الطرائق الرياضية في تحليل فورييرـ تأليف: د.محمد بن عبدالرحمن القويز

إعداد:

أ. فواز بن سعود العتيبي

ـ قسم الرياضيات – جامعة الملك سعود





# المحتويـات

## الفصل الأول: فضاء الضرب الداخلي

## الفصل الثاني: مسألة شتورم - ليوفيل

## الفصل الثالث: سلاسل فورير

## الفصل الرابع: كثيرات الحدود المتعامدة

## الفصل الخامس: دوال بيسل

## الفصل السادس: تحويل فورريير

## الفصل السابع: تحويل لابلاس

لنفرض الآن أن لدينا مجموعة من المتجهات المستقلة

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

في فضاء الضرب الداخلي X . هل يمكن تكوين مجموعة متعامدة منها؟ فيما يلي نقدم ما يعرف **بطريقة قرام ـ شميدت** (Gram-Schmidt) لتكوين المجموعة المتعامدة $\{y_1, \ldots, y_n\}$ بدلالة المجموعة $\{x_i\}$ :

نختار المتجه الأول بأنه $x_1$

$$y_1 = x_1$$

ثم نعرف المتجه الثاني بأنه $x_2$ بعد أن نستخرج منه مسقط $x_2$ في اتجاه $y_1$ ، أي

$$y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1$$

ونعرف المتجه الثالث بأنه $x_3$ بعد استخراج مسقطي $x_3$ في اتجاه $y_1$ و $y_2$

$$y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\|y_2\|^2} y_2$$

وهكذا إلى أن نصل إلى المتجه الأخير

$$y_n = x_n - \frac{\langle x_n, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 - \cdots - \frac{\langle x_n, y_{n-1} \rangle}{\|y_{n-1}\|^2} y_{n-1}$$

وبإمكان القارىء أن يتحقق من أن المجموعة $\{y_i\}$ متعامدة.

## تمارين (1.1)

(1) استخدم خواص الفضاء الخطي X فوق $\mathbb{F}$ لإثبات أن

(i) $0 \cdot x = 0$ لكل $x \in X$

(لاحظ أن 0 في الطرف الأيسر هو صفر الحقل $\mathbb{F}$ بينما 0 في الطرف الأيمن هو المتجه الصفري).

(ii) $a \cdot x = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (x = 0)$

(iii) $-x = (-1) \cdot x$

(2) فيما يلي عيِّن الفضاءات الخطية ونوعها :

(i) كثيرات الحدود من الدرجة n ذات المعاملات المركبة فوق الحقل $\mathbb{C}$.

(ii) كثيرات الحدود$\mathcal{P}$ ذات المعاملات التخيلية فوق الحقل $\mathbf{R}$.

(iii) مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$.

(3) أثبت أن المتجهات $x_1, \dots, x_n$ مرتبطة خطيا إذا (وفقط إذا) وجد $k \in \{1, \dots, n\}$ بحيث

$$x_k = \sum_{\substack{1 \\ i \neq k}}^{n} a_i x_i \quad , \quad a_i \in \mathbb{F}$$

ثم استنتج أن أي مجموعة $\{x_i\}$ من المتجهات (سواء كانت منتهية أم لا) مرتبطة خطيًّا إذا أمكن التعبير عن أحدها بتركيب خطي من مجموعة جزئية منتهية من بقيَّتها.

(4) أثبت أن المتجهات

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_{11}, \dots, x_{1n}) \\ &\vdots \\ x_n &= (x_{n1}, \dots, x_{nn}) \end{aligned}$$

حيث $x_{ij} \in \mathbf{R}$ لكل i و j مرتبطة خطيًّا إذا وفقط إذا كانت المحددة $\det(x_{ij})$ تساوي الصفر.

(5) أثبت أن المتجهين x و y في فضاء الضرب الداخلي الحقيقي متعامدان إذا وفقط إذا كان

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

هل هذه العبارة صحيحة عندما يكون الفضاء مركبا؟

(6) افرض أن $x$ و $y$ متجهان في فضاء حاصل الضرب الداخلي $X$ وأن $\|x\|=\|y\|$. أثبت أن $x-y$ عمودي على $x+y$ إذا كان الفضاء $X$ حقيقيا.

(7) افرض أن $\varphi_1(x)=1$ ، $\varphi_2(x)=x$ ، $\varphi_3(x)=x^2$ على الفترة $[-1,1]$. استخدم العلاقة (1.3) لإيجاد

(i) $\langle \varphi_1,\varphi_2 \rangle$ (ii) $\langle \varphi_1,\varphi_3 \rangle$

(iii) $\|\varphi_1-\varphi_2\|^2$ (iv) $\|2\varphi_1+3\varphi_2\|$

(8) عين الدوال المتعامدة في $C([0,1])$ من بين الدوال التالية

$$\varphi_1(x)=1,\ \varphi_2(x)=x,\ \varphi_3(x)=\sin 2\pi x,\ \varphi_4(x)=\cos 2\pi x$$

(9) احسب مسقط الدالة $f(x)=\cos^2 x$ في $C([-\pi,\pi])$ على كل من الدوال

$$f_1(x)=1,\ f_2(x)=\cos x,\ f_3(x)=\cos 2x,\ -\pi\leq x\leq\pi$$

(10) تحقق من أن الدوال $\varphi_1$، $\varphi_2$ ، $\varphi_3$ في تمرين (7) مستقلة خطيًّا ثم استخرج منها مجموعة متعامدة باستخدام طريقة قرام ـ شميدت.

(11) حول مجموعة الدوال المتعامدة في تمرين (10) إلى مجموعة متعامدة عياريًّا.

(12) أثبت أن المجموعة $\{1,x,|x|\}$ مستقلة خطيًّا في $C([-1,1])$ ثم كوِّن منها مجموعة متعامدة عياريًّا. هل المجموعة مستقلة خطيا في $C([0,1])$؟

(13) أثبت أن مجموعة الدوال $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ مرتبطة خطيًّا في $C^{n-1}([a,b])$ إذا وفقط إذا كان $\det(f_j^{(i)})=0$ على $[a,b]$ حيث $0\leq i\leq n-1$ ، $1\leq j\leq n$.

(14) تحقق من تعامد مجموعة الدوال التالية على $[-1,1]$

$$\varphi_1(x)=1\,,\ \varphi_2(x)=x^2-\frac{1}{3}\,,\ \varphi_3=\frac{x}{|x|}\quad \forall x\neq 0\,,\ \varphi_3(0)=0$$

ثم استخرج منها مجموعة متعامدة عياريًّا.

(15) حدد قيم $a$ ، $b$ ، $c$ لكي تصبح الدالة $x^2+bx+c$ عمودية على كل من الدالتين $x+1$ و $x-1$ على الفترة $[0,1]$.

(16) أثبت أن $||f||=0$ إذا وفقط إذا كان $f=0$ لكل $f\in C([a,b])$، ثم أعط مثالا لدالة معرفة على $[a,b]$ بحيث $||f||=0$ ولكن $f$ ليست الدالة الصفرية.

## (1.3) فضاء الدوال $\mathcal{L}^2$

في فضاء الدوال المركبة المتصلة على $[a,b]$ سبق أن عرفنا حاصل الضرب الداخلي بين الدالتين $f$ و $g$ بأنه

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx \tag{1.10}$$

ومنه قياس الدالة $f$

$$||f||=\sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx} \tag{1.11}$$

والآن سنثبت صحة متراجحتي شفارتز (1.6) والمثلث (1.8) في فضاء الضرب الداخلي $C([a,b])$. لأي $f,g\in C([a,b])$ لدينا

$$\left\|\frac{|f|}{||f||}-\frac{|g|}{||g||}\right\|^2 = \int_a^b\left[\frac{|f(x)|}{||f||}-\frac{|g(x)|}{||g||}\right]^2 dx \geq 0$$

حيث نفترض أن $||f||\neq 0$ و $||g||\neq 0$. فنحصل من ذلك على

$$\int_a^b \frac{|f(x)|}{||f||}\cdot\frac{|g(x)|}{||g||}dx \leq \frac{1}{2||f||^2}\int_a^b |f|^2(x)dx + \frac{1}{2||g||^2}\int_a^b |g|^2(x)dx = 1$$

$$\Rightarrow |\langle f,g\rangle| \leq \langle |f|,|g|\rangle \leq ||f||\,||g|| \tag{1.12}$$

وإذا كان $||f||=0$ أو $||g||=0$ فإن هذه المتراجحة تتحول إلى مساواة. أما إذا كانت الدالتان $f$ و $g$ حقيقيتين فإن متراجحة شفارتز تأخذ الصورة

$$\langle f\,,\,g\rangle \leq |\langle f\,,\,g\rangle| \leq ||f||\;||g||$$

ومن جهة أخرى فإن

$$\begin{aligned}||f+g||^2 &= \langle f+g, f+g\rangle\\ &=||f||^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle f,g\rangle + ||g||^2\\ &\leq ||f||^2 + 2||f||\,||g|| + ||g_2||^2\\ &=(||f||+||g||)^2\end{aligned}$$

## تمارين 1.1

① (i) $0X = (0+0)X$

$= 0\cdot X + 0\cdot X$ خاصية التوزيع

$0\cdot X = 0\cdot X + 0\cdot X$

بإضافة $-0V$ $0\cdot X + (-0\cdot X) = (-0\cdot X) + (0\cdot X + 0\cdot X)$

خاصية الدمج ✓ $0 = (-0\cdot X + 0\cdot X) + 0\cdot X$

النظير الجمعي في X $0 = 0 + 0\cdot X$

العنصر المحايد في X $0 = 0\cdot X$

(ii) لنفرض أن $a\cdot X = 0$ و $a \neq 0$ [illegible] $X = 0$

إذا كان $a\cdot X = 0$ فإن $\frac{1}{a}\cdot a\cdot X = \frac{1}{a}0$

$X = 0 \Leftarrow 1\cdot X = 0$

(iii) بما أن $0 = 0\cdot X = (1+(-1))\cdot X = X + (-1)X$

$-X + 0 = -X + (X + (-1)X)$

$= (-X + X) + (-1)X = 0 + (-1)X = (-1)X$

وبما أن $-X + 0 = -X$ $\Leftarrow$ $-X = (-1)X$

② (i) $P = \{a_n x^n + \cdots + a_0,\ a_i \in \mathbb{C}\ \forall 0 \le i \le n\}$

فضاء متجه مركب بعملية الجمع [illegible] وعملية الضرب العددي

$b(a_n x^n + \cdots + a_0) = b a_n x^n + \cdots + b a_0$

حيث $b \in \mathbb{C}$

(ii) $P = \{i a_n x^n + \cdots + i a_0,\ a_i \in \mathbb{R}\ \forall 0 \le i \le n\}$

فضاء متجه تحت (مركب) بعملية الجمع [illegible] وعملية الضرب العددي

$b(i a_n x^n + \cdots + b\cdot(a_0)) = i b a_n x^n + \cdots + i b a_0$

حيث $b \in \mathbb{R}$

(iii) $X = \{a \in \mathbb{R}\}$

فضاء متجه [illegible]

③ لنفرض أولاً أن $\{x_1, \dots, x_n\}$ مجموعة مرتبطة خطياً عندئذ توجد $a_1, \dots, a_n \in F$ ليست جميعها أصفاراً بحيث يكون:

$a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$ وكتابة $a_k\neq 0$ عندئذ

$$a_kx_k=-a_1x_1-a_2x_2-\dots-a_{k-1}x_{k-1}-a_{k+1}x_{k+1}-\dots-a_nx_n$$

وبما أن $a_k\neq 0$ فيوجد $a_k^{-1}$ وبضرب الطرفين به فإننا نحصل على:

$$x_k=-a_1x_k^{-1}-a_2x_k^{-1}x_2-\dots-a_{k-1}a_k^{-1}x_{k-1}-a_{k+1}a_k^{-1}x_{k+1}-\dots-a_na_k^{-1}x_n$$

هذا يعني أن $x_k$ تركيب خطي لبقية المتجهات

وبرهان العكس نفرض أن:

$$x_k=a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_{k-1}x_{k-1}+a_{k+1}x_{k+1}+\dots+a_nx_n$$

بإضافة $-x_k$ للطرفين نحصل على:

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+(-1)x_k+\dots+a_nx_n=0$$

وبما أن معامل $x_k$ لا يساوي صفراً فإننا نحصل على أن المجموعة $\{x_1,\dots,x_n\}$ مرتبطة خطياً

لتكن $\{x_0,x_1,\dots\}$ مجموعة ~~مرتبطة خطياً~~

ولتكن $x$ تركيب خطي من المجموعة المنتهية $\{x_0,\dots,x_n\}$ أحد عناصرها

أي $x=\sum_{i=0}^{n}x_i$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n}x_i+(-1)x=0$$

فتكون المجموعة $\{x_0,\dots,x_n,x\}$ مرتبطة خطياً ومن الطبيعي فيكون حسب (ii) من تعريف (1.2)

المجموعة $\{x_0,x_1,\dots,x_n,\dots\}$ مرتبطة خطياً

(٤) نوجد بحيث $a_k\neq 0$ ، $a_1x_1+\dots+a_kx_k+\dots+a_nx_n=0$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & & \\ a_k & a_k & \dots & a_k \\ \vdots & & & \\ a_n & a_n & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

يوجد

$$X_k = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} X_i ,$$

$$X_{k1} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} X_{i1}$$

$$X_{k2} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} X_{i2}$$

$$\vdots$$

$$X_{kn} = \sum_{i\neq k} X_{in}$$

$$\begin{bmatrix} X_{k1} \\ X_{k2} \\ \vdots \\ X_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} + X_{21} + \cdots + X_{k-11} + X_{k+11} \cdots + X_{n1} \\ \\ X_{nn} + X_{2n} + \cdots + X_{k-1n} + X_{k+1n} - X_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & - & X_{2n} \\ X_{k1} & X_{k2} & & X_{kn} \\ X_{n1} & X_{n2} & - & X_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & & X_{1n} \\ \\ X_{11}+X_{21} + & \cdots & + & X_{n1} \\ \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix}$$

ثم بالعمليات الصفية الأولية أو العمودية الأولية

نحصل الصف رقم k كله أصفار فتكون المحددة صفراً

⑤ x و y متعامدان $\Longleftrightarrow \langle x,y\rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle y,x\rangle = 0$

[illegible]

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + 0 + 0 + \|y\|^2$$

(?) العبارة صحيحة عندما يكون الفضاء حقيقياً لأن $\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \langle y,x\rangle = 0$ : $\langle y,x\rangle$ ‏[illegible]

⑥ $\langle x+y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle$

$-\langle y, y\rangle$ من شروط الضرب الداخلي

$= \|x\|^2 + \cancel{\langle x, y\rangle} - \cancel{\langle x, y\rangle} - \|y\|^2$

$= \|x\|^2 - \|X\|^2$ من المعطى

$= 0$

∴ $x+y$ و $x-y$ متعامدان

⑦ $\langle \varphi_1, \varphi_2\rangle = \int_{-1}^{1} \varphi_1 \bar{\varphi}_2 \, dx = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x \, dx = 0$ (i)

$\langle \varphi_1, \varphi_3\rangle = \int_{-1}^{1} \varphi_1 \bar{\varphi}_3 \, dx = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 \, dx = 2\int_{0}^{1} x^2 \, dx$ (ii)

$= 2 \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

$\|\varphi_1 - \varphi_2\|^2 = \langle \varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2\rangle$ (iii)

$= \int_{-1}^{1} (1-x)\overline{(1-x)} \, dx = \int_{-1}^{1} (1-x)^2 \, dx = 2\int_{0}^{1} (1-x)^2 dx$

~~$= \int_{-1}^{1} (1 - 2x + x^2) \, dx =$~~ $-2\left.\frac{(1-x)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

$\|2\varphi_1 + 3\varphi_2\| = \sqrt{\langle 2\varphi_1 + 3\varphi_2, 2\varphi_1 + 3\varphi_2\rangle}$ (iv)

$= \left[\int_{-1}^{1} (2+3x)\overline{(2+3x)} \, dx\right]^{\frac{1}{2}}$

$= \left[\int_{-1}^{1} (2+3x)^2 \, dx\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2}{3}\int_{0}^{1} 3(2+3x)^2 \, dx\right]^{\frac{1}{2}}$

$= \left[\frac{2}{3} \left.\frac{(2+3x)^3}{3}\right]_0^1\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2}{9}(5^3 - 2^3)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{234}{9}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{26}$

(٨)

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2} \neq 0$$

$\varphi_1 , \varphi_2$ غير متعامدتين

$$\langle \varphi_1, \varphi_3 \rangle = \int_0^1 \sin(2\pi x)\,dx = -\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)\Big]_0^1 = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} = 0$$

$\varphi_1$ و $\varphi_3$ متعامدتان

$$\langle \varphi_1, \varphi_4 \rangle = \int_0^1 \cos(2\pi x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\Big]_0^1 = 0 - 0 = 0$$

$\varphi_1$ و $\varphi_4$ متعامدتان

$$\langle \varphi_2, \varphi_3 \rangle = \int_0^1 x\sin(2\pi x)\,dx = -\frac{x}{2\pi}\cos(2\pi x)\Big]_0^1 + \frac{1}{2\pi}\overset{0}{\cancel{\int_0^1 \cos(2\pi x)\,dx}}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \neq 0$$

$\varphi_2$ و $\varphi_3$ غير متعامدتين

$$\langle \varphi_2, \varphi_4 \rangle = \int_0^1 x\cos(2\pi x)\,dx = \frac{x}{2\pi}\sin(2\pi x)\Big]_0^1 - \frac{1}{2\pi}\overset{0}{\cancel{\int_0^1 \sin(2\pi x)\,dx}}$$

$$= 0$$

$\varphi_2$ و $\varphi_4$ متعامدتان

$$\langle \varphi_3, \varphi_4 \rangle = \int_0^1 \sin(2\pi x)\cos(2\pi x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin^2(2\pi x)}{2}\Big]_0^1 = 0$$

$\varphi_3$ و $\varphi_4$ متعامدتان

(٩) مسقط $f$ على $f_1$ هو $\langle f, \frac{f_1}{\|f_1\|} \rangle$ :

$$\|f_1\| = \sqrt{\langle f_1, f_1 \rangle} = \left[\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

$$\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2x)+1}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi} [\cos(2x)+1]\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(2x)}{2} + x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\pi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

مسقط $f$ على $f_2$ هو $\langle f, \frac{f_2}{\|f_2\|} \rangle$ :

$$\|f_2\| = \sqrt{\langle f_2, f_2 \rangle} = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx\right]^{\frac{1}{2}} = \left[2\int_0^{\pi} \frac{\cos(2x)+1}{2}\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\left[\frac{\sin(2x)}{2} + x\right]_0^{\pi}\right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

$$\langle f, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

مسقط f على $f_3$ هو $\langle f, \frac{f_3}{\|f_3\|} \rangle$

$\|f_3\| = \sqrt{\langle f_3, f_3 \rangle} = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$

$\left\langle f, \frac{f_3}{\|f_3\|} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\cos(2x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

⑪ نفرض $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ بحيث $a_1 \cdot \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3 = 0$

$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$

$\therefore \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ مستقلة خطياً

$y_1 = x_1 = 1$

$y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\|y_1\|^{2}} \times y_1$

$= x - \frac{\cancel{\langle x, 1 \rangle}^{x}}{\cancel{4}\; 2} 1 = x$

$y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\|y_1\|^{2}} \times y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\|y_2\|^2} y_2$

$= x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\cancel{4}\; 2} . 1 - \frac{\langle x^2, x \rangle}{\cancel{4/6}\; \frac{2}{3}} (x)$

$= x^2 - \frac{1}{3} - 0$

⑫ القاعدة العيارية المتعامدة هي

$\left\{ \frac{y_1}{\|y_1\|}, \frac{y_2}{\|y_2\|}, \frac{y_3}{\|y_3\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}x, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\}$

$\|y_3\| = \sqrt{\langle y_3, y_3 \rangle} = \left[\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$

⑬ نفرض $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ بحيث $a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + a_3 |x| = 0$

$\begin{cases} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + a_3 x = 0 & , \; x \geq 0 \\ a_1 \cdot 1 + a_2 x - a_3 x = 0 & ; \; x < 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 0 \;\&\; a_2 + a_3 = 0$

⑭ المجموعة غير مستقلة خطياً في $C[0,1]$ لأنه $x = |x|$ على $[0,1]$

لا يكتب في
هذا الهامش

$\langle x^2 + bx + c,\ x+1 \rangle = 0$ &  (15)

$\langle x^2 + bx + c,\ x-1 \rangle = 0$

$$\Rightarrow \int_0^1 (x^2+bx+c)(x+1)\,dx = 0$$

$$\int_0^1 \left[x^3 + bx^2 + c\cancel{x} x^2 + bx + c\right] dx = 0$$

$$\int_0^1 \left[x^3 + (b+1)x^2 + (c+b)x + c\right] dx = 0$$

$$\frac{x^4}{4} + (b+1)\frac{x^3}{3} + \frac{(c+b)x^2}{2} + cx \Big]_0^1 = 0$$

$$\frac{1}{4} + \frac{b}{3} + \frac{1}{3} + \frac{c}{2} + \frac{b}{2} + c = 0$$

$$\frac{5}{6}b + \frac{3}{2}c = -\frac{7}{12} \quad \text{—} \quad (1)$$

& $$\int_0^1 (x^2+bx+c)(x-1)\,dx = 0$$

$$\frac{1}{4} + \frac{b}{3} - \frac{1}{3} + \frac{c}{2} - \frac{b}{2} - c = 0$$

$$-\frac{1}{6}b - \frac{1}{2}c = \frac{1}{12} \quad \text{—} \quad (2)$$

$$(1) + (2)\cancel{\times 5} \Rightarrow -c = -\frac{2}{12} \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{6}}$$

in (2): $-\frac{1}{6}b - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

$$-\frac{1}{6}b = \frac{2}{12} \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

(١٠) ($\Leftarrow$) نفرض $\|f\| = 0 \Rightarrow \|f\|^2 = 0 \Leftrightarrow \langle f, f \rangle = 0$

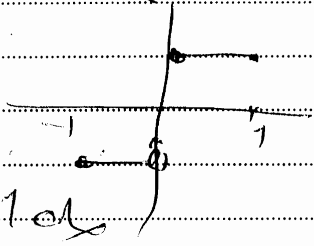
$\Leftrightarrow 0 = \int_a^b |f(x)|^2 dx \Leftrightarrow |f(x)|^2 = 0 \Rightarrow |f(x)| = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$

مثال

$$f(x) = \begin{cases} 1 , & 0 \leq x \leq 1 \\ -1 , & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

f غير متصلة عند $x = 0 \Rightarrow f \notin [-1,1]$



$$\int_{-1}^{1} f(x) dx = \int_{-1}^{0} -1 dx + \int_{0}^{1} 1 dx$$

$$= -1 + 1 = 0$$

لكن $f \neq 0$ على $[-1,1]$

$$\begin{aligned}\left\langle e^{inx}, e^{imx}\right\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\ \overline{e^{imx}}dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\ e^{-imx}dx\\ &= \frac{1}{i(n-m)}e^{i(n-m)x}\Big|_{-\pi}^{\pi}\quad , \ n\neq m\\ &= \frac{1}{i(n-m)}[\cos(n-m)x+i\sin(n-m)x]\Big|_{-\pi}^{\pi}\\ &= 0\end{aligned}$$

كما أن

$$\|e^{inx}\|=\left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\ e^{-inx}dx\right]^{1/2} = \sqrt{2\pi}$$

مما يعني أن المجموعة $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}: n\in\mathbb{Z}\right\}$ متعامدة عياريًّا في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ المركب.

## تمارين (1.2)

(1) تحقق من تطابق متراجحة شفارتز ومتراجحة المثلث على الدالتين $f(x)=1$ و $g(x)=x$ حيث $0\le x\le 1$.

(2) حدد الدوال التي تنتمي للفضاء $\mathcal{L}^2(0,\infty)$ واحسب قياس كل منها:

$\sin x$ (i) $\frac{1}{1+x}$ (ii) $e^{-x}$ (iii) $1/\sqrt[3]{x}$ (iv)

(3) متى تتحقق المساواة $\langle f,g\rangle=\|f\|\,\|g\|$ في $\mathcal{L}^2(a,b)$ ؟

(4) متى تتحقق المساواة $\|f+g\| = \|f\|+\|g\|$ في $\mathcal{L}^2(a,b)$ ؟

(5) عين قيم $\alpha$ الحقيقية التي تجعل $x^\alpha\in \mathcal{L}^2(0,1)$.

(6) عين قيم $\alpha$ الحقيقية التي تجعل $x^{\alpha} \in \mathcal{L}^2(1,\infty)$.

(7) إذا كانت الدالة f متصلة على $[0,\infty)$ وتنتمي للفضاء $\mathcal{L}^2(0,\infty)$ فأثبت أن $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(8) أثبت أن كلّ دالة في $\mathcal{L}^2(a,b)$، حيث $-\infty < a < b < \infty$، قابلة للتكامل على (a,b). أثبت أن العكس غير صحيح بإعطاء مثال لدالة قابلة للتكامل على (a,b) لكنها لا تنتمي إلى $\mathcal{L}^2(a,b)$.

(9) إذا كانت الدالة f محدودة وقابلة للتكامل على $[0,\infty)$ فأثبت أنها تقع في $\mathcal{L}^2(0,\infty)$. أثبت أن العكس غير صحيح بإعطاء مثال لدالة محدودة في $\mathcal{L}^2(0,\infty)$ لكنها غير قابلة للتكامل على $[0, \infty)$.

(10) عبر عن الدالة $\sin^3 x$ في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ بدلالة الدوال المتعامدة $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$.

## (1.4) متتاليات الدوال وتقاربها

لنفرض أن لكل $n \in \mathbb{N}$ هناك دالة (حقيقية أو مركبة) $f_n$ معرفة على الفترة الحقيقية I. نقول عندئذ إن لدينا متتالية من الدوال $f_n$ المعرفة على I. إذا كانت متتالية الأعداد $f_n(x)$ متقاربة عند كل نقطة x في I، وكان

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

قيل إن المتتالية $f_n$ **متقاربة نقطيًّا** (pointwise convergent) من f، وإن الدالة f المعرفة على I هي النهاية (النقطية) للمتتالية $f_n$. نعبر عن ذلك اختصارا بكتابة

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f$$

## تمارين (9.2)

① متراجحة شفارتز (إذا كانت الدالتان حقيقيتين) :

$$\langle f,g\rangle \le |\langle f,g\rangle| \le \|f\|\|g\|$$

$$\langle f,g\rangle = \langle x,1\rangle = \int_0^1 x\cdot 1\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\|f\| = \left[\int_0^1 1^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|g\| = \left[\int_0^1 x^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$\frac{1}{2} \le \left|\frac{1}{2}\right| \le 1\sqrt{\frac{1}{3}}$ متراجحة شفارتز متحققة

متراجحة المثلث : $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$

$$\|f+g\| = \left[\int_0^1 (x+1)\,dx\right]^{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{x^2}{2} + x\Big]_0^1\right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\|f\| + \|g\| = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-3}{\sqrt{6}} \approx \frac{1.4+(1.4)(1.3)-3}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{3.22-3}{\sqrt{6}} = \frac{0.22}{\sqrt{6}} > 0 \Rightarrow \|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$$

⇐ متراجحة المثلث متحققة

---

② (i) $\int_0^\infty \sin^2 dx = \int_0^\infty \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx$

$$= \lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^\varepsilon [1-\cos(2x)]\,dx = \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{2}\left\{x - \frac{\sin(2x)}{2}\right\}_0^\varepsilon$$

$$= \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\varepsilon - \frac{\sin(2\varepsilon)}{2}\right\} = \infty \text{ D.N.E}$$

$\sin x \notin \mathcal{L}^2(0,\infty) \Leftarrow$

(ii) $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_0^\varepsilon \frac{dx}{(1+x)^2} = \lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{-1}{1+x}\cancel{\ln(1+x)}\Big]_0^\varepsilon$

$$= \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\cancel{\ln}\frac{-1}{(1+\varepsilon)} + 1\cancel{\ln 1}\right] = \cancel{\lim \infty} \; 0+1 = 1$$

$\left\|\frac{1}{1+x}\right\| = \sqrt{1} = 1$ 3 $\frac{1}{1+x} \in \mathcal{L}^2(0,\infty) \Leftarrow$

(iii) $\int_0^\infty (e^{-x})^2\,dx = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_0^\varepsilon e^{-2x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{e^{-2x}}{-2}\Big]_0^\varepsilon$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \left[ \frac{e^{-2\varepsilon}}{2} + \frac{1}{2} \right] = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\| e^{-x} \| = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \qquad \therefore \; e^{-x} \in \mathcal{L}^2(0,\infty)$$

$$(iv) \quad \int_0^\infty \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx = \int_0^\infty x^{-\frac{2}{3}} dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_0^\varepsilon x^{-\frac{2}{3}} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} 3x^{\frac{1}{3}} \Big]_0^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to \infty} \left[ 3\sqrt[3]{\varepsilon} - 0 \right] = \infty$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \notin \mathcal{L}^2(0,\infty)$$

---

(ج) إذا كانت كلٌّ من $f$ و $g$ دالة موجبة متصلة في $(a,b)$ $\mathcal{L}^2$

فإن المساواة تتحقق $\Longleftrightarrow$ $f$ و $g$ مرتبطتان خطياً

الإثبات: $(\Leftarrow)$ نفرض العكس أي أنهما ~~مرتبطتا~~ مستقلتان خطياً

$$(\alpha_1 = \alpha_2 = 0) \quad \alpha_1 f + \alpha_2 g = 0$$

$$\langle \alpha_1 f + \alpha_2 g, f \rangle = 0$$

$$\alpha_1 \langle f, f \rangle + \alpha_2 \langle g, f \rangle = 0$$

$$\alpha_1 \|f\|^2 + \alpha_2 \langle g, f \rangle = 0$$

وكذلك

$$\langle \alpha_1 f + \alpha_2 g, g \rangle = 0$$

$$\alpha_1 \langle f, g \rangle + \alpha_2 \|g\|^2 = 0$$

$$\alpha_1 \|f\|^2 + \alpha_2 \|f\| \|g\| = 0$$

$$\alpha_1 \|f\| \|g\| + \alpha_2 \|g\|^2 = 0$$

$(\Rightarrow)$ نفرض أنهما مرتبطان خطياً يوجد $\alpha \neq 0$ حيث $f = \alpha g$

$$\langle f, g \rangle = \langle \alpha g, g \rangle = \alpha \|g\|^2 = \cancel{\alpha \| \tfrac{1}{\alpha} f \|^2}$$

$$= \alpha \|g\| \|g\| = \alpha \| \tfrac{1}{\alpha} f \| \|g\|$$

$$= \alpha \tfrac{1}{\alpha} \|f\| \|g\|$$

$$= \|f\| \|g\|$$

لا يكتب في
هذا الهامش

(4) تتحقق المساواة إذا كانت $f$ و $g$ مرتبطتين خطياً

وأيضاً $f = \alpha g$ حيث $\alpha \geq 0$ ([illegible] 3)

البرهان:

$$\|f+g\|^2 = \langle f+g , f+g \rangle$$
$$= \|f\|^2 + 2\,\cancel{Re}\langle f , g\rangle + \|g\|^2$$
$$= \|f\|^2 + 2\,\|f\|\|g\| + \|g\|^2$$
$$= \left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \|f+g\|^2 = \left(\|f\| + \|g\|\right)^2$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين ينتج لدينا:

$$\|f+g\|^{\cancel{2}} = \|f\| + \|g\|$$

(5) $\alpha > \frac{1}{2}$

(6) $\alpha < \frac{1}{2}$

(7) لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{R}^+$ بحيث $|f(x)| < \varepsilon \Rightarrow |x| > N$
لدينا $\int_0^\infty f^2(x)dx < \infty$ و $f$ متصلة عند $x = 0$

(8) من متراجحة شفارتز $\langle f,g\rangle \leq |\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\|g\|$
$$\langle f , f\rangle = \int_a^b f^2 dx \leq \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

أمثلة: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ على $(0,1]$

$f$ ~~[illegible]~~ دالة على $(0,1]$ ولكن $f \notin \mathcal{L}^2(0,1)$

(~~9~~

(9) المفروض :-

$\sin^3 x = a_1 \cdot 1 + a_2 \cos x + a_3 \sin x + a_4 \cos(2x) + a_5 \sin(2x) + \cdots$

$\langle \sin^3 x, 1 \rangle = a_1 \cdot 2\pi$

$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \, dx = 2\pi a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$

$\langle \sin^3 x, \cos x \rangle = a_2 \int_{\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx$

$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos x \, dx = a_2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx \Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$

$\langle \sin^3 x, \sin x \rangle = a_3 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx$

$\frac{3\pi}{4} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \, dx = a_3 \cdot \pi \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{3}{4}}$

$\langle \sin^3 x, \cos(2x) \rangle = a_4 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2x) \, dx$

$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos(2x) \, dx = a_4 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2x) \, dx \Rightarrow \boxed{a_4 = 0}$

$\langle \sin^3 x, \sin(2x) \rangle = a_5 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(2x) \, dx$

$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \sin(2x) \, dx = a_5 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(2x) \, dx \Rightarrow \boxed{a_5 = 0}$

$\langle \sin^3 x, \cos(3x) \rangle = a_6 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(3x) \, dx$

$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(x) \cos(3x) \, dx = a_6 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(3x) \, dx \Rightarrow \boxed{a_6 = 0}$

$\langle \sin^3 x, \sin(3x) \rangle = a_7 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(3x) \, dx$

$-\frac{\pi}{4} = \int_{\pi}^{\pi} \sin^3(x) \sin(3x) \, dx = a_7 \cdot \pi \Rightarrow \boxed{a_7 = -\frac{1}{4}}$

وعليه التأكد أن $a_n = 0$ لكل $n > 7$

أي أن

$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin(3x)$

أما متسلسلة المشتقات

$$\sum_1^\infty \frac{d}{dx}(\frac{1}{n^2}\sin nx) = \sum_1^\infty \frac{1}{n}\cos nx$$

فليست متقاربة بانتظام، بل إنها غير متقاربة عند بعض قيم $x$ ، مثل $x=0$ ، حيث تصبح $\sum_1^\infty 1/n = \infty$ ، ولذلك لا نستطيع أن نكتب

$$\frac{d}{dx}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\sin nx = \sum_1^\infty \frac{1}{n}\cos nx \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

(ii) المتسلسلة $\sum_1^\infty \frac{1}{n^3}\sin nx$ متقاربة بانتظام (باختبار فايرشتراس) كما أن

$$\sum_1^\infty \frac{d}{dx}(\frac{1}{n^3}\sin nx) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\cos nx$$

متقاربة بانتظام، وبالتالي فإن المساواة

$$\frac{d}{dx}\sum_1^\infty \frac{1}{n^3}\sin nx = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\cos nx \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

صحيحة.

## تمارين (1.3)

(1) احسب النهاية النقطية حيثما وجدت لكل من المتتاليات :

(i) $\frac{x^n}{1+x^n}$ حيث $x\in\mathbf{R}$ (ii) $\sqrt[n]{x}$ حيث $0\le x<\infty$

(iii) $\sin nx$ حيث $x\in\mathbf{R}$.

(2) حدد نوع التقارب لكل من المتتاليات

(i) $\frac{x^n}{1+x^n}$ حيث $0 \le x \le 2$ (ii) $\sqrt[n]{x}$ حيث $0 < x \le 1$

(3) حدد نوع التقارب للمتتالية

$$f_n(x) = \begin{cases} nx\,, & 0 \le x < 1/n \\ 1\,, & 1/n \le x \le 1 \end{cases}$$

ثم قرر ما إذا كانت المساواة التالية صحيحة أم لا

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

(4) احسب نهاية المتتالية

$$f_n(x) = \begin{cases} nx\,, & 0 \le x \le 1/n \\ \\ \frac{n}{n-1}(1-x)\,, & 1/n<x\le 1 \end{cases}$$

وحدد نوع التقارب على [0,1]..

(5) احسب نهاية المتتالية $f_n(x)=nx(1-x^2)^n$ على [0,1] وحدد نوع التقارب.

(6) أثبت أن التقارب $\frac{x}{x+n} \to 0$ منتظم على [0,a] لأي a>0 وغير منتظم على .[0,∞)

(7) افرض أن $f_n(x) = \begin{cases} 1/n & |x| \le n \\ 0 & |x| > n \end{cases}$ واستنتج أن $f_n \xrightarrow{u} 0$ .

احسب $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$ وبين لماذا لا تساوي 0 حسب النظرية (1.1).

(8) عين مجال التقارب ونوعه للمتسلسلة $\sum_1^\infty f_n$ ، حيث

(i) $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$    (ii) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$

(9) إذا كانت $\sum_1^\infty a_n$ متقاربة مطلقا فأثبت أن $\sum_1^\infty a_n \sin nx$ متقاربة بانتظام على **R**.

(10) أثبت أن

$$A_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \to 0$$

عندما $n \to \infty$ ، ثم استخدم ذلك لاستنتاج أن التكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ موجود. هل التكامل $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ أيضا موجود؟

(11) تسمى المتسلسلة

$$\sum_0^\infty a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

متسلسلة قوى (power series)، ومن المعلوم (انظر [2]) أنها متقاربة في $(-R,R)$ ومتباعدة خارج $[-R,R]$ ، حيث

$$R = \left[\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right]^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \geq 0$$

إذا كان $R>0$ استخدم اختبار فايرشتراس لإثبات أن متسلسلة القوى متقاربة بانتظام على $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ حيث $\varepsilon$ أي عدد موجب (أقل من R).

(12) استنتج من التمرين (11) أن متسلسلة القوى $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ دالة متصلة على $(-R,R)$، ثم أثبت أنها قابلة للاشتقاق على $(-R,R)$، حيث $f'(x) = \sum_1^\infty n a_n x^n$.

(13) استنتج من التمرين (12) أن متسلسلة القوى $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ قابلة للاشتقاق أي عدد من المرات على $(-R,R)$ وأن

$$a_n = f^{(n)}(0)/n! \quad \forall n = 0,1,2,\ldots$$

(14) استخدم نتيجة التمرين (13) لإيجاد متسلسلات القوى (متسلسلات تيلور) التي تمثل الدوال الأسية والمثلثية

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$$

$$\cos x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

على $\mathbf{R}$ ، ومن ثم استنتج علاقة أويلر (Euler) الشهيرة

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

حيث $i = \sqrt{-1}$.

## (1.5) التقارب في $\mathcal{L}^2$

**تعريف (1.6)**

نقول عن متتالية الدوال $f_n \in \mathcal{L}^2(a,b)$ إنها **متقاربة في** $\mathcal{L}^2$ إذا كان هناك دالة $f \in \mathcal{L}^2(a,b)$ بحيث

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

أي إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $N$ بحيث

$$n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon$$

ونعبر عن ذلك رمزا بكتابة $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$ ، ونسمي $f$ **نهاية** $f_n$ في $\mathcal{L}^2(a,b)$.

## تمارين (1-3)

① (i) $\frac{x^n}{1+x^n} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{if } |x|<1 \\ 1 & \text{if } |x|>1 \\ \frac{1}{2} & \text{if } x=1 \\ \text{غير موجودة} & \text{if } x=-1 \end{cases}$ دالة غير متصلة

(ii)

$\sqrt[n]{x} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{if } x=0 \\ 1 & \text{if } x>0 \end{cases}$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sin nx$ غير موجودة

② (i) نقيض
(ii) نقيض التصحيح : $0 \le x \le 2$ )

④ تقارب نقطي إلى :
$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \; x=0 \\ 1-x & ; \; 0<x\le 1 \end{cases}$

⑥ $\frac{x}{x+n} = \left|\frac{x}{x+n}\right| < \epsilon$

$x < x\epsilon + n\epsilon$

$x(1-\epsilon) < n\epsilon$

$x < \frac{n\epsilon}{1-\epsilon}$

⑦ لأن مجال تعريف $f_n$ غير محدود

⑧ (i) $\frac{1}{n^2+x^2} \le \frac{1}{n^2} \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$
والمتسلسلة $\sum\frac{1}{n^2}$ متقاربة لأن p=2 حسب اختبار
فايرشتراس المتسلسلة $\sum\frac{1}{n^2+x^2}$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$

(ii) $\cancel{\frac{x^n}{1+x^n} <}$ المتسلسلة غير متقاربة لأن x=-1
$\sum \frac{(-1)^n}{1+(-1)^n}$

⑨ $|a_n \sin nx| \le |a_n|$

والمتسلسلة $\sum |a_n|$ متقاربة (لأن $\sum a_n$ متقاربة مطلقاً)

⇐ $\sum a_n \sin nx$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$

(حسب اختبار فايرشتراس)

⑩ تلميح: استخدم اختبار المتسلسلة المتناوبة وتباعد المتسلسلة التوافقية $\sum \frac{1}{n}$

التكامل $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx = \infty$

⑪ $|a_n x^n| \le |a_n| |R|^n$

$= |a_n| \left[\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right]^n$

(12) $f_k = a_k x^k$ متصلة على $(-R,R)$ لكل $k$ ⇐

$S_n$ متصلة لكل $n$ و $S_n \to S$ منتظماً (كما في السؤال 11) ⇐ المتسلسلة $\sum_1^\infty f_k$ متصلة على $(-R,R)$ (انظر (1) نتيجة (1.1.1))

$f_k = a_k x^k$ قابلة للاشتقاق على $(-R,R)$ لكل $k$

والمتتالية $S_n' = \sum_1^n f_k' = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$ متقاربة بانتظام

على $(-R,R)$ ⇐ $S_n \xrightarrow{u} S$ كما أن

$S = \sum_1^\infty f_k$ قابلة للاشتقاق على $(-R,R)$ ويكون

$S'(x) = \left(\sum_1^\infty f_k\right)' = \sum_1^\infty f_k' = \sum_1^\infty k a_k x^{k-1}$

$e^x = f(x) \rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \,,\; f^{(n)}(0) = 1 \;\; \forall n$ (١٤

$\cancel{e^x = \sum 1.}$ $a_n = \frac{1}{n!} \;\; \forall\, n = 0, 1, 2, \ldots$

$e^x = \sum \frac{1}{n!} x^n$

$\cos x = f(x) \rightarrow f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x$

$f'''(x) = \sin x$

$f^{(4)}(x) = \cos x$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ odd} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}(1) & n \text{ even} \end{cases}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{2k}{2}}}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k} x^{2k}}{(2k)!}$$

$\sin x = f(x) \rightarrow f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f^{(3)}(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = \sin x$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} 1 & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{2k+1-1}{2}}}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k} x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$i^n = \begin{cases} 1 & n = 4k \\ i & n = 4k+1 \\ -1 & n = 4k+2 \\ -i & n = 4k+3 \end{cases}$$

$$\cos x + i \sin x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + i\left[\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right]$$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$ واضح التساوي

## تمارين (1.4)

(1) احسب النهاية في $\mathcal{L}^2(0,1)$ ، إن وجدت ، للمتتالية

$$f_n(x)=\begin{cases} nx & 0\le x<1/n \\ 1 & 1/n\le x\le 1\end{cases}$$

(2) إذا كانت $\sum_1^\infty |a_n|$ متقاربة فأثبت أن $\sum_1^\infty |a_n|^2$ متقاربة ومن ثم استنتج أن $\sum_1^\infty a_n \sin nx$ متقاربة في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ وأنها تمثل دالة متصلة على $[-\pi,\pi]$.

(3) حدد المعاملات $a_i$ في الدالة

$$a_1\sin\frac{\pi}{2}x+a_2\sin\pi x+a_3\sin\frac{3\pi}{2}x$$

للحصول على أفضل تقريب في $\mathcal{L}^2(0,2)$ للدالة

$$f(x)=1\ ,\ 0<x<2$$

(4) حدد المعاملات $a_i$ و $b_i$ في الدالة

$$a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x$$

للحصول على أفضل تقريب في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ للدالة

$$f(x)=|x|\quad \forall x\in[-\pi,\pi]$$

(5) على افتراض أن

$$1-x=\frac{8}{\pi^2}\sum_1^\infty\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x\ ,\ 0\le x\le 2$$

استخدم علاقة بارسيفال للحصول على $\pi^4=96\sum_1^\infty\frac{1}{(2n-1)^4}$.

(6) عرف المتتالية الموجبة $(a_n)$ بحيث تكون المتسلسلة $\sum_1^\infty a_n^2$ متقاربة والمتسلسلة $\sum_1^\infty a_n$ متباعدة. استنتج نوع التقارب الممكن للمتسلسلة $\sum_1^\infty a_n \cos nx$ حيث $-\pi\le x\le\pi$.

## تمارين (1.4)

(١) $f = 1$ ، $\|f_n - f\|^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} (nx-1)^2 dx + \int_1^1 (1-1)^2 dx$ (أ)

$= \int_0^{\frac{1}{n}} (n^2x^2 - 2nx + 1)\, dx = \left[ n^2 \frac{x^3}{3} - nx^2 + x \right]_0^{\frac{1}{n}}$

$\cancel{\frac{1}{3}n^2}$ $\frac{1}{3n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \|f_n - f\|^2 \longrightarrow 0 \Rightarrow \|f_n - f\| \longrightarrow 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{in } \mathcal{L}^2} f$

(٣) المجموعة $\{\sin(\frac{n\pi}{2}x), n\in\mathbb{N}\}$ مجموعة متعامدة في $\mathcal{L}^2(0,2)$ (تأكد!)

$\Rightarrow$ أفضل تقريب في $\mathcal{L}^2(0,2)$ للدالة $f$ نحصل عليه بالاختيار

$$\alpha_k = \frac{\langle f, \sin(\frac{k\pi x}{2}) \rangle}{\|\sin(\frac{k\pi x}{2})\|^2} \quad , k = 1, 2, 3$$

⋮

(٤) المجموعة $\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx ; n \in \mathbb{N}\}$ مجموعة متعامدة في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ (تأكد!)

$\Rightarrow$ أفضل تقريب في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ للدالة $f$ نحصل عليه بالاختيار

$$a_0 = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\|1\|^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_1 = \frac{\langle f, \cos x \rangle}{\|\cos x\|^2} = -4/\pi$$

$$b_1 = \frac{\langle f, \sin x \rangle}{\|\sin x\|^2} = 0$$

$$a_2 = \frac{\langle f, \cos 2x \rangle}{\|\cos 2x\|^2} = 0$$

$$b_2 = \frac{\langle f, \sin 2x \rangle}{\|\sin 2x\|^2} = 0$$

$$\|f\|^2 = \sum_1^\infty \frac{\langle f, \varphi_n \rangle^2}{\|\varphi_n\|^2} \quad \{\varphi_n\} \text{ مجموعة تامة } \textcircled{c}$$

$$f(x) = 1-x, \quad \varphi_n = \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} x \, ; \qquad \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\|f\|^2 = \int_0^2 (1-x)^2 dx = -\frac{(1-x)^3}{3}\Big]_0^2$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\langle f, \varphi_n \rangle^2 = \beta \int_0^2 (1-x) \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} x \, dx$$

$$\frac{2n-1}{2}\pi = \alpha, \quad \beta = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$= \beta \int_0^2 \cos \overset{\alpha}{\cancel{\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi}}\, x - \int_0^2 x \cos(\alpha x)\, dx$$

$$= \beta \, \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x)\Big]_0^2 - \beta \Big\{ \frac{1}{\alpha} x \sin(\alpha x)\Big]_0^2 - \frac{1}{\alpha} \int_0^2 \sin \alpha x \, dx \Big\}$$

$$= \beta \Big\{ \frac{1}{\alpha} \sin(2\alpha) - 0 - \frac{2}{\alpha} \sin(2\alpha) + 0 - \frac{1}{\alpha^2} \cos(\alpha x)\Big]_0^2 \Big\}$$

$$\beta \Big\{ -\frac{1}{\alpha} \sin(2\alpha) - \frac{1}{\alpha^2} \cos(2\alpha) + \frac{1}{\alpha^2} \Big\}$$

$$\beta \Big\{ \frac{2 \cancel{n}}{(2n-1)\pi} \overset{=0}{\sin (2n-1)\pi} - \frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2} \overset{-1}{\cos (2n-1)\pi} + \frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2} \Big\}$$

$$= \frac{8}{(2n-1)^2 \pi^2} \cdot \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{64}{\pi^2 (2n-1)^4}$$

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_0^2 \varphi_n^2 \, dx = \int_0^2 \cos^2(\alpha x)\, dx, \quad \alpha = \frac{2n-1}{2}\pi$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 [\cos(2\alpha x) + 1]\, dx = \frac{1}{2} \Big[ \frac{1}{2\alpha} \sin(2\alpha x) + x \Big]_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \Big[ \frac{1}{2\alpha} \sin (2n-1) \cdot 2\pi + 2 - 0 - 0 \Big] = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \sum \frac{64}{(2n-1)^4 \pi^4} \Rightarrow \pi^4 = \sum_1^\infty \frac{96}{(2n-1)^4}$$

٣/٣
١٠

لا يكتب
هذا الهـا

ح) المتتالية $a_n = \frac{1}{n}$

تقارب $\sum \frac{1}{n} \cos nx$ هو $\mathcal{L}^2$

من استقلال الدالتين $y_1$ و $y_2$.

بصفة أعم، وبالرجوع إلى الشروط الحدية المنفصلة

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \xi$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \eta$$

نرى أن التعويض $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ يعطي

$$c_1[\alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 y_1'(a)] + c_2[\alpha_1 y_2(a) + \alpha_2 y_2'(a)] = \xi$$

$$c_1[\beta_1 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b)] + c_2[\beta_1 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b)] = \eta$$

فنستنتج أننا نحصل على حل وحيد إذا وفقط إذا كانت المحددة

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1')(a) & (\alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_2')(a) \\ (\beta_1 y_1 + \beta_2 y_1')(b) & (\beta_1 y_2 + \beta_2 y_2')(b) \end{vmatrix} \neq 0$$

## تمارين (2.1)

(1) أوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية

(i) $y'' - 4y' + 7y = e^x$

(ii) $xy'' - y' = 3x^2$

(iii) $x^2 y'' + 2xy' + 1 = 0$

(2) استخدم متسلسلات القوى لحل المعادلة $y'' + 2xy' + 4y = 0$ حول النقطة $x = 0$. ما هي فترة التقارب؟

(3) أوجد حل المسألة الحدّية

$$y'' + \frac{x}{1-x} y' - \frac{1}{1-x} y = 0 \ , \quad -1 < x < 1$$

$$y(0) = 0 \ , \quad y'(0) = 1$$

(4) إذا كانت مجموعة الدوال $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ حلولاً للمعادلة التفاضلية (2.4) فأثبت أن

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_3'' \end{vmatrix} = 0$$

(5) لأي حلين مستقلين $y_1$ و $y_2$ للمعادلة المتجانسة (2.4) أثبت أن

$$q = \frac{-y_1 y_2'' - y_2 y_1''}{W(y_1, y_2)} \quad , \quad r = \frac{y_1' y_2'' - y_2' y_1''}{W(y_1, y_2)}$$

(6) استنتج المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة التي يكون لها الحلان التاليان

(i) $x , \sinh x$

(ii) $\cos x , e^x$

(iii) $x^n , x^m \qquad n,m \in \mathbf{N},\ n \neq m$

(7) أثبت أنه إذا كان $p,q \in C^n(I)$ فإن كل حل للمعادلة (2.4) ينتمي إلى $C^{n+2}(I)$، وعلى وجه الخصوص يكون الحل في $C^2(I)$ إذا كانت كل من $p$ و $q$ متصلة.

## (2.2) أصفار الحلول

ليس من الضروري، وقد لا يكون من المتيسِّر، حل المعادلة

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{2.11}$$

للتعرف على طبيعة الحلول وخواصها. فالمعادلة التفاضلية نفسها، بالإضافة إلى الشروط الحدية المرافقة لها، تحدد هذه الحلول بشكل كامل (حسب نظرية الوجود والوحدانية)، وبالتالي فإن خواص هذه الحلول، مثل عدد أصفارها وتوزيعها، ونقاطها الشاذة، وخواص التعامد بينها، وما إلى ذلك، جميعها محكومة بالمعادلة (2.11) (أي بالمعاملين $q$ و $r$) بالإضافة إلى الشروط الحدية المكملة لها. في هذا

لا يكتب في
هذا الهامش

## تمارين (2.1)

1) (i) حل المعادلة المتجانسة $y''-4y'+7y=0$

المعادلة المميزة: $m^2-4m+7=0$

$\Delta = b^2-4ac = 16-4(1)(7) = 16-28 = -12$

$m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}i}{2}$

$= 2 \pm \sqrt{3}i$

$y_c = e^{2x}(c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x))$

لنفرض الحل الخاص للمعادلة الأصلية على الشكل $y_p = Ae^x$

$y'_p = Ae^x, \quad y''_p = Ae^x$

نعوض في المعادلة الأصلية:

$Ae^x - 4Ae^x + 7Ae^x = e^x \Rightarrow 4Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow y_p = \frac{1}{4}e^x$

الحل العام هو:

$y_G = y_c + y_p = c_1 e^{2x}\cos\sqrt{3}x + c_2 e^{2x}\sin\sqrt{3}x + \frac{1}{4}e^x$

(ii) نعتبر المعادلة: $x^2y''-xy'=3x^3$ (معادلة كوشي أويلر)

لدينا $a_1=-1$ و $a_2=0$

المعادلة: $m^2+(a_1-1)m+(a_2 \cancel{\;\;}) = 0$

$m^2 - 2m \cancel{+1} = 0$

$\cancel{(m-1)^2=0} \Rightarrow m_1 = 0, \; m_2 = 2$

الحل للمعادلة المتجانسة $x^2y''-xy'=0$ هو:

$y_c = c_1 x^{+2} + c_2 x^0$

نوجد $y_p$ بطريقة تغيير الثوابت

$y_1 = x^2, \; y_2 = 1$

$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -2x$

$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{3x^3}{x^2} & y'_2 \end{vmatrix} = -3x$

$u'_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{-3x}{-2x} = \frac{+3}{2}$

$\Rightarrow u_1 = \int \frac{3}{2} \, dx = \frac{3}{2} X$

$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{3x^3}{x^2} \end{vmatrix} = x^2 \cdot 3x = 3x^3$

$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{3x^3}{-2x} = -\frac{3}{2}x^2$

$u_2 = \int -\frac{3}{2}x^2 \, dx = \frac{-1}{2}x^3$

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \frac{3}{2}x \cdot x^2 - \frac{1}{2}x^3(1) = x^3$

$=$ ~~$-\frac{3}{2}x^3 \log x + \frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^3$~~ $\log x$

~~$= \frac{7}{4}x^3$~~

اكل الحل للعو

$y = y_c + y_p = c_1 x^2 + c_2 \qquad + x^3$

$c_1 =$ لدينا (1,1)

$$\boxed{|x|<1 \quad ، \quad y = c_0\left(1-2x^2+\frac{4}{3}x^4+\dots+\right)+c_1\left(x-x^3+\frac{1}{2}x^5+\dots\right)} \text{ حل}$$

② ضع $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \Leftarrow y' = \sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad ، \quad y'' = \sum_{2} n(n-1) a_n x^{n-2}$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$\sum_{2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{0}^{\infty} 4 a_n x^n = 0$$

$n-2=k \qquad n=k \qquad n=k$

$$\sum_{0} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k \quad // \quad \boxed{c_{n+2} = \frac{-2}{n+1} c_n ,} \quad \leftarrow \text{ حل}$$

④

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_3'' \end{vmatrix} =$$

$$\varphi_1\left[\varphi_2'\varphi_3'' - \varphi_3'\varphi_2''\right] - \varphi_2\left[\varphi_1'\varphi_3'' - \varphi_3'\varphi_1''\right] + \varphi_3\left[\varphi_1'\varphi_2'' - \varphi_2'\varphi_1''\right] =$$

المعادلة ذات الرتبة n لها على الأكثر n حلول مستقلة خطية

⑤

$y_1'' + q(x)\, y_1' + r(x)\, y_1 = 0 \quad \Leftarrow$ حل $y_1$

$y_2'' + q(x)\, y_2' + r(x)\, y_2 = 0 \quad \Leftarrow$ حل $y_2$

نظام معادلتين الحل $q(x)$ و $r(x)$ نحله بطريقة كرامر

$$\begin{cases} y_1'\, q(x) + y_1\, r(x) = -y_1'' \\ y_2'\, q(x) + y_2\, r(x) = -y_2'' \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$q(x) = \frac{\begin{vmatrix} -y_1'' & y_1 \\ -y_2'' & y_2 \end{vmatrix}}{W} = \frac{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}{W}$$

$$r(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1' & -y_1'' \\ y_2' & -y_2'' \end{vmatrix}}{W} = \frac{y_2' y_1'' - y_1' y_2''}{W}$$

$m-1=0 \Leftarrow m_1=1 \Leftarrow e^{x}$ (ii)

$m^2+1=0 \Leftarrow m=\pm i \Leftarrow \cos x$

$\Rightarrow (m-1)(m^2+1)=0$

$\cancel{(y'-y)(y''+y)=}$

$m^3+m \neq m^2-1=0$

$y'''-y''+y'-y=0$

(iii) لدينا $m_1=n$ و $m_2=m$

حل المعادلة :

$$m^2+(a_1-1)m+a_2=0$$

ضع $\alpha=a_1-1$ و $\beta=a_2$

سيصبح لدينا المعادلتين :

$$n^2+\alpha n+\beta=0$$

$$m^2+\alpha m+\beta=0$$

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix}-n^2 & 1\\ -m^2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}n & 1\\ m & 1\end{vmatrix}}=\frac{m^2-n^2}{(n-m)}=\frac{(m-n)(m+n)}{(n-m)}$$

$$=-m-n$$

$$\beta=\frac{\begin{vmatrix}n & -n^2\\ m & -m^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}n & 1\\ m & 1\end{vmatrix}}=\frac{mn^2-nm^2}{n-m}=\frac{mn(n-m)}{n-m}=mn$$

إذن المعادلة هي :

$$y''+a_1xy'+a_2y=0$$

$$y''+(1-m-n)xy'+mny=0$$

③ الكلامها ؛ خ و ×

$$u'' + (1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2})u = 0 \qquad (2.16)$$

وبمقارنة المعادلة (2.16) مع $u'' + u = 0$ نرى أن كل فترة جزئية من $(0,\infty)$ بطول $\pi$ فيها صفر واحد على الأقل لأي حل لمعادلة بيسل من الرتبة $0 \le n \le \frac{1}{2}$ ، حيث $r(x) = 1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2} \ge 1$ ، وفيها صفر واحد على الأكثر لأي حل غير تافه لمعادلة بيسل من الرتبة $n > \frac{1}{2}$ حيث $r(x) = 1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2} < 1$.

## تمارين (2.2)

(1) استنتج من التمهيد (2.3) أن أصفار أي حل غير تافه للمعادلة $y'' + r(x)y = 0$ على فترة محدودة هي مجموعة منتهية.

(2) ليكن $\varphi$ حلاً غير تافه للمعادلة $y'' + r(x)y = 0$ حيث $r(x) > 0$ على $(0,\infty)$. إذا كان $\varphi(x) > 0$ على $(0,a)$ وكان هناك نقطة $x_0$ في $(0,a)$ حيث $\varphi'(x_0) < 0$ فأثبت أن للدالة $\varphi$ صفرًا عن يمين النقطة $x_0$.

(3) افرض أن $\varphi$ حل غير تافه للمعادلة $y'' + r(x)y = 0$ وأن $r(x) > 0$ لكل $x > 0$. إذا كان $\int_1^\infty r(x)dx = \infty$ فأثبت أن للدالة $\varphi$ عددًا غير منته من الأصفار الموجبة.

إرشاد : لو كان للدالة $\varphi$ عدد منته من الأصفار في $(0,\infty)$ لكان هناك $a > 1$ بحيث $\varphi > 0$ على $[a,\infty)$. عرف $\psi = -\varphi'/\varphi$ على $[a,\infty)$ واستنتج أن $\psi' = r + \psi^2$ ومن ثم

$$\psi(x) = \varphi(a) + \int_a^x r(t)dt + \int_a^x \psi^2(t)dt$$

بيّن الآن أن هناك $b > a$ بحيث $\varphi'(x) < 0$ على $[b,\infty)$ واستخدم نتيجة التمرين (2).

(4) أثبت أن أي حل غير تافه للمعادلة $y'' + \frac{k}{x^2} y = 0$ على $(0,\infty)$ له عددغير منته من الأصفار إذا وفقط إذا كان $k > \frac{1}{4}$. هل يتوافق ذلك مع نتيجة التمرين (3)؟

(5) عين المعادلات ذات الحلول المتذبذبة على $(0,\infty)$ من بين

$$\text{(i)}\quad y'' + \frac{1}{x} y = 0 \qquad \text{(ii)}\quad y'' - x^2 y = 0 \qquad \text{(iii)}\quad x\sqrt{x}\, y'' + ky = 0$$

حيث k ثابت موجب.

(6) أوجد الحل العام لمعادلة بيسل من الرتبة 0 وعيِّن أصفاره.

(7) إذا كانت $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ فأثبت أن حلــول المعادلة $y'' + (1 + f(x))y = 0$ متذبذبة.

(8) أثبت أن حلول معادلة إيــري (Airy) $y'' + xy = 0$ لها عـدد غير منته من الأصفار على محور x الموجب، وصفر واحد على الأكثر علــى المحــور السالب.

## (2.3) المؤثر قرين الذات في $\mathcal{L}^2$

لدراســة التعامــد وما يتعلــق به مــن خــواص لحلول المعادلة الخطية من الرتبة الثانية

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{2.17}$$

يتطلــب الأمر دراسة هــذه الحلــول في الفضــاء $\mathcal{L}^2$. ولهــذا الغــرض نعــرِّف **المؤثــر** (operator) أو **التحويــل** (transformation) **الخطــي** فــي فضــاء المتجهــات X بأنــه تطبيق $A{:}X \to X$ يحقق

لا يكتب ف
هذا الهامـ

## تمارين (2.2)

(1) من التمهيد: الحل غير التافه أصفاره ~~هو~~ معزولة
ومن نظرية بولزانو - فايرشتراس أي مجموعة محدودة
غير منتهية من الأصفار تحتوي لها على الأقل نقطة معزولة

(4) استخدم التعويض $x = e^t$

(5) (أ) نعم
(ب) لا

(ج) استخدم نظرية (2.2) (نظرية المقارنة الثانية)

(6) معادلة بيسل من الرتبة 0 هي: $x^2u'' + xu' + u = 0$
وتكتب على الشكل: $(xu')' + xu = 0$
عوض بـ $u = \sum a_k x^k$ في المعادلة الأخيرة لتحصل على
العلاقة التراجعية:

$$k^2 a_k = -a_{k-2}$$

من أجل $a_0 = 1$ ، $a_1 = 0$ المعادلة التفاضلية الأخيرة لها الحل
التحليلي:

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2.4}\right)^2 - \left(\frac{x^3}{2.4.6}\right)^2 + \dots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \dots + (-1)^r \frac{x^{2r}}{[2^r(r!)]^2} + \dots$$

هذه المتسلسلة متقاربة لكل $x$ باستخدام اختبار النسبة
وتعرف دالة بيسل من الرتبة 0.

$$u(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x \tag{2.25}$$

بالشروط الحدّية

$$u(0) = u(\pi) = 0 \tag{2.26}$$

نجد أن المساواة (2.23) محققة وأن $\frac{d^2}{dx^2}$ بالتالي قرين لذاته. كما أن

$$u(0) = c_1 = 0$$

$$u(\pi) = c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\,\pi = n\pi \Rightarrow \lambda = n^2, n \in \mathbb{N}$$

مما يعني أن القيم الذاتية للمؤثر $\frac{d^2}{dx^2}$ هي المتالية $(n^2 : n\in \mathbb{N})$ وأن الدوال الذاتية المناظرة هي $(\sin nx : n\in \mathbb{N})$. لاحظ أننا استبعدنا حالة $n = 0$ لأن $\sin 0 = 0$ ليست مقبولة كدالة ذاتية. كما استبعدنا قيم $n$ الصحيحة السالبة لأن $\sin(-n)x = -\sin nx$ فهي لا تضيف إلى المجموعة $\{\sin nx : n\in \mathbb{N}\}$ أي دوال مستقلة.

لاحظ أيضا أن القيم الذاتية $\lambda_n = n^2$ أعداد حقيقية وأن الدوال الذاتية $u_n(x) = \sin x$ متعامدة في $\mathcal{L}^2(0,\pi)$ (تحقق من ذلك!)، بما يتفق مع الفقرتين (i) و(ii) من نظرية (2.3).

## تمارين (2.3)

(1) باعتبار $L = \frac{d}{dx}(p\frac{d}{dx}) + r$ ، أثبت متطابقة لاقرانج (Lagrange identity)

$$uLv - vLu = [p(uv' - vu')]'$$

(2) أوجد القيم والدوال الذاتية لكل من

(i) $$-\frac{d^2}{dx^2} : C^2(0,\infty) \to C(0,\infty)$$

(ii) $$-\frac{d^2}{dx^2} : \mathcal{L}^2(0,\infty) \cap C^2(0,\infty) \to \mathcal{L}^2(0,\infty)$$

(3) أثبت أن المؤثر $d^2/dx^2$ المعرف على فضاء الدوال $\{u\in C^2(0,\pi):u(0) = u'(\pi) = 0\}$ قرين لذاته، ثم أوجد القيم والدوال الذاتية له.

(4) تحقق من انطباق الشرطين (i) و (ii) في نظرية (2.3) على القيم والدوال الذاتية للمؤثر المعرف في التمرين (2.3.3).

(5) ابحث خواص المؤثر المعرف في التمرين (ii) 2.3.2 على ضوء النظرية (2.3).

(6) افرض أن $py'' + qy' + ry + \lambda y = 0$ على $(a,b)$ حيث $p(x) > 0$. استنتج أن هذه المعادلة تتحول إلى الصيغة $\tilde{p}y'' + \tilde{p}'y' + \tilde{r}y + \lambda wy = 0$ بالضرب في الدالة الموجبة $\frac{1}{p}\exp(\int q / p)$. لاحظ أن ذلك يسمح لنا بتحويل المؤثر $p\frac{d^2}{dx^2}+q\frac{d}{dx}+r$ ، حيث $p>0$ ، إلى المؤثر القرين لذاته $\tilde{p}\frac{d^2}{dx^2}+\tilde{p}'\frac{d}{dx}+\tilde{r}$.

(7) ضع كلا من المؤثرات التالية في الصورة $p\frac{d^2}{dx^2}+p'\frac{d}{dx}+r$ ، حيث $p > 0$ ، بالضرب في دالة مناسبة.

$$\text{(i)}\quad x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx}+1 \quad , \quad x>0$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{d^2}{dx^2}-x\frac{d}{dx}$$

$$\text{(iii)}\quad \cos x\frac{d^2}{dx^2}+\sin x\frac{d}{dx}-\cos^2 x\,, -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

## (2.4) مسألة شتورم - ليوفيل العادية

وجدنا في البند (2.3) أن المؤثر التفاضلي

## تمارين (2.3)

② (i) $e^{\pm\sqrt{\lambda}\,x}$ , $\lambda \in \mathbb{C}$

(ii) $e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$ , $\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} > 0$

⑦ b (ii)

## تمارين (2.4)

(1) أوجد القيم والدوال الذاتية للمسألة

$$u'' + \lambda u = 0 \quad , \quad a \le x \le b$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

(2) تحقق من أن $p(f'g - fg')\Big|_a^b = 0$ إذا كانت كل من f و g تحقق الشروط الحدية المنفصلة (2.30).

(3) متى تظل النظرية (2.4) صحيحة إذا كانت الشروط الحدية على المعادلة (2.29) هي الشروط الدورية

$$u(a) = u(b) \quad , \quad u'(a) = u'(b)$$

بدلا عن الشروط المنفصلة (2.30)؟

(4) افرض أن $py'' + qy' + ry + \lambda wy = 0$ على $[a,b]$ ، حيث $p(x) > 0$. حوّل هذه المعادلة ، بعد الضرب في دالة مناسبة ، إلى الصيغة $\tilde{p}y'' + \tilde{p}'y' + \tilde{r}y + \lambda\tilde{w}y = 0$ حيث تحقق $\tilde{w}$ الشروط اللازمة في دالة الثقل ، على اعتبار أن w دالة ثقل في المعادلة الأصلية.

(5) ضع كلا من المعادلات التفاضلية التالية في صورة شتورم - ليوفيل وعيّن دالة الثقل في كل معادلة :

(i) $x^2 u'' + \lambda u = 0 \quad , \quad x > 0$

(ii) $\sin x\, u'' + \cos x\, u' + \lambda \sin x\, u = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi$

(iii) $u'' - u' + \lambda u = 0$

(iv) $u'' - x^2 u' + \lambda u = 0$

(6) عين الشروط الحدية التي تجعل $p(f'g - fg')\Big|_a^b = 0$ من بين الشروط التالية :

(i) $p(x) = 1, a \le x \le b$ , $u(a) = u(b)$ , $u'(a) = u'(b)$

(ii) $p(x) = x$ , $0 < a \le x \le b$ , $u(a) = u'(b) = 0$

(iii) $p(x) = \sin x$ , $0 \le x \le \pi/2$ , $u(0) = 1$ , $u(\pi/2) = 0$

(iv) $p(x) = e^{-x}$ , $0 < x < 1$ , $u(0) = u(1)$ , $u'(0) = u'(1)$

(v) $p(x) = x^2$ , $0 < x < b$ , $u'(0) = u(b)$ , $u'(b) = u(b)$

(vi) $p(x) = x^2$ , $0 < x < b$ , $u'(0) = u(b)$ , $u' (b) = u(0)$

(vii) $p(x) = x^2$ , $-1 < x < 1$ , $u(-1) = u(1)$ , $u'(-1) = u'(1)$

(7) في تمرين (2.4.6) حدد الشروط التي تعين مسألة شتورم - ليوفيل الشاذة.

(8) أوجد القيم والدوال الذاتية للمسألة

$$[(x+3)^2 y']' + \lambda y = 0 \quad , \quad -2 \le x \le 1$$
$$y(-2) = y(1) = 0$$

(9) افرض أن

$$(pu')' + ru + \lambda u = 0 \quad , \quad a < x < b$$
$$u(a) = u(b) = 0$$

(i) أثبت أن

$$\lambda \int_a^b |u|^2 \, dx = \int_a^b p|u'|^2 \, dx - \int_a^b r|u|^2 \, dx$$

(ii) إذا كانت $p(x) \ge 0$ ، $r(x) \le c$ فأثبت أن $\lambda \ge -c$.

## (2.5) مسألة شتورم - ليوفيل الشاذة

في معادلة شتورم - ليوفيل

$$(p'u)' + ru + \lambda wu = 0 \quad , a < x < b$$

لا
هذ

## تمارين (2.4)

④ $\lambda_n = n^2\pi^2(b-a)^{-2}, \; u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right)$

⑤ i, ii, iii, vii

⑧ غيّر المتغير المستقل إلى $\xi = x+3$ وحل.

$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\log 4}\right)^2 + \frac{1}{4}, \; y_n(x) = (x+3)^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{\log 4}\log(x+3)\right)$

⑨ (ii) اضرب بـ $\bar{u}$ وكامل على الفترة $[a,b]$

للحصول على الصيغة الأسية لمتسلسلة فورير التي تمثل الدالة f ، ما علينا إلا حساب المعاملات $c_n$ على أساس الصيغة (3.18):

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} e^{-inx}dx - \int_{-\pi}^{0} e^{-inx}dx\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(e^{-inx} - e^{inx})dx \\ &= \frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx \\ &= -\frac{i}{n\pi}(1-\cos n\pi)\ ,\ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ومن الصيغة (3.17) نحصل على

$$f(x) \doteq \frac{-i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}[1-(-1)^n]e^{inx}\ ,\ -\pi \le x \le \pi$$

وبالإمكان التحقق من صحة المساواة (تمرين (3.1.2))

$$\frac{-i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}[1-(-1)^n]e^{inx} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x \quad (3.19)$$

## تمارين (3.1)

(1) تحقق من تعامد المجموعة $\{e^{in\pi x/\ell} : n \in \mathbb{Z}\}$ في $\mathcal{L}^2(-\ell,\ell)$.

(2) أثبت صحة المساواة (3.19).

(3) هل المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x$ متقاربة بانتظام ، ولماذا؟

(4) أوجد مفكوك فورير للدالة الثابتة $f(x) = 1$ على $[-\pi,\pi]$.

(5) أوجد مفكوك فورير للدالة المعرفة على $[-1,1]$ بالقاعدة

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

(6) أوجد مفكوك فورييه في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ للدالة $f(x) = \pi - |x|$ ، وأثبت أن تقاربه منتظم.

(7) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متقاربة فأثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n \cos nx$ تمثل دالة متصلة على $[-\pi,\pi]$.

(8) أثبت أن المتسلسلة $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ تمثل دالة في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ إذا وفقط إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ متقاربة.

## (3.2) التقارب النقطي لسلاسل فورييه

نقول عن الدالة $f : \mathbf{R} \to \mathbb{C}$ إنها **دورية** (periodic) إذا وجد عدد موجب p بحيث

$$f(x+p) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbf{R} \tag{3.20}$$

ويسمى p عندئذ **دور** (period) الدالة f. لاحظ أن العلاقة (3.20) تقود إلى

$$f(x+np) = f(x+(n-1)p+p) = f(x+(n-1)p) = \cdots = f(x)$$
$$f(x-np) = f(x-np+p) = f(x-(n-1)p) = \cdots = f(x) \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

مما يعني أن أي مضاعف صحيح للدور p هو دور آخر للدالة f. لكننا عندما نتحدث عن دور الدالة فإننا غالبا ما نقصد أصغر عدد موجب p يحقق المساواة (3.20). فعلى سبيل المثال دور الدالة sin x والدالة cos x هو $2\pi$ ، بينما دور الدالة $\sin\frac{\pi}{\ell}x$ أو $\cos\frac{\pi}{\ell}x$ هو $2\ell$. أما الدالة الثابتة فإن كل عدد موجب هو دور لها.

إذا كانت المتسلسلة

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3.21}$$

متقاربة على **R** فمن الواضح أنها تمثل دالة دورية في $2\pi$ لأن $2\pi$ هو الدور المشترك لجميع حدودها. وقد وجدنا في البند السابق أن اختيار المعاملات في هذه المتسلسلة بالشكل

لا يكتب
هذا الها

ج) لا، لأن مجموعها غير متصل عند $x=0$ (مثال 3.1)

د) $$\pi-|x|=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$$

تقارب منتظم باستخدام اختبار ڤايرشتراس M

ح) استخدام M-test

## محاضرة طرائق -

**مثال** ، أوجد مفكوك فورير للدالة $f$ في $\mathcal{L}^2((-\pi,\pi))$

$f(x) = \pi - |x|$ $\qquad$ $f \in \mathcal{L}^2((-\pi,\pi))$

- الحل -

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)^2\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \pi^2\,dx - 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx$$

$$= \pi^2(2\pi) - 4\pi\frac{\pi^2}{2} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 2\pi^3 - 2\pi^3 + \frac{2\pi^3}{3} = 2\frac{\pi^3}{3} < \infty$$

$$f(x) = f(-x) = \pi - |-x| = \pi - |x| = f(x)$$

⇐ $f(x)$ دالة زوجية ، بالتالي مفكوك فورير :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - |x|)\,dx = 2\pi - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx$$

$$= 2\,\cancel{\frac{\sin nx}{n}}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{-2}{\pi}\left[x\,\cancel{\frac{\sin nx}{n}}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right] = \frac{2}{\pi n}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-2}{\pi n^2}\left[\cos n\pi - 1\right] = \frac{2}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} 0 & n \text{ زوجي ،} \\ \frac{4}{\pi n^2} & n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cos x + \frac{4}{3^2\pi}\cos 3x + \frac{4}{5^2\pi}\cos 5x + \cdots$$

$$f(x) \simeq \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x \longrightarrow \circledast$$

استنتج أن : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ ؟

نعوض عنها $x=0$ في $\circledast$

$$f(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \pi$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

بوسعنا الآن، بناء على النتيجتين (1.1.1) و (3.3.1)، أن نقول بأن الدالة التي تحقق شروط النظرية الأساسية (3.2) دالة متصلة إذا وفقط إذا كانت متسلسلة فورير التي تمثلها على **R** متقاربة بانتظام. وغني عن القول أن هذه النتيجة تسري على الدوال الدورية في $2l$ كما تسري على الدوال الدورية في $2\pi$.

**نتيجة (3.3.2)**

لأي دالة f تحقق شروط النظرية (3.2) تكون متسلسلة فورير التي تمثلها متقاربة بانتظام إذا وفقط إذا كانت f دالة متصلة.

## تمارين (3.2)

(1) أثبت أن كل دالة متصلة قطعيا على [a,b] تنتمي إلى $\mathcal{L}^2(a,b)$.

(2) عين الدوال المتصلة قطعيًا والملساء قطعيًا من بين الدوال التالية :

(i) $f(x)=\sqrt[3]{x} \ , \ x\in\mathbf{R}$

(ii) $f(x)=|\sin| \ , x\in\mathbf{R}$

(iii) $f(x)=\sqrt{x} \ , \ 0\le x<1 \ , \ f(x+1)=f(x)$

(iv) $f(x)=|x|^{3/2} \ , -1\le x\le 1 \ , f(x+2)=f(x)$

(v) $f(x)=[x] \ , x\in\mathbf{R}$

حيث [x] هو الجزء الصحيح من العدد x.

(3) افرض أن كلا من الدالتين f و g ملساء بالتجزيء على (a,b). أثبت أن كلا من المجموع f + g وحاصل الضرب f g أيضا ملساء بالتجزيء. ماذا يمكن أن نقول عن ناتج القسمة f / g؟

(4) افرض أن f ملساء بالتجزيء على الفترة (a,b) ودورية على **R**.

(i) أثبت أن f ملساء بالتجزيء على **R**

(ii) إذا كان دور الدالة f هو b − a فأثبت أن

$$\int_c^d f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

لكل فترة (c,d) تحقق d − c = b − a.

(5) افرض أن f دالة ملساء بالتجزيء على (a,b) وأن

$$g(h) = \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h} \ , \ h \neq 0$$

استنتج أن

$$g(0^+) = f'(x^+)$$

(6) أثبت أن $D_n$ دالة زوجية ودورية في $2\pi$.

(7) أثبت أن نواة ديريشليه $D_n(\xi)$ تساوي

$$D_n(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})\xi}{2\pi \sin(\xi/2)} & , \quad \xi \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots \\ \dfrac{2n+1}{2\pi} \ , \ \xi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots \end{cases}$$

(8) أوجد قيمة $D_n(\xi)$ العظمى.

(9) أوجد حلول المعادلة $D_n(\xi) = 0$.

(10) اكتب تفاصيل برهان النتيجة (3.2.1).

(11) اكتب نص الصيغة الأسية للنتيجة (3.2.1).

(12) أوجد منشور فورير لكل من الدوال المعطاة في التمارين من (12) إلى (17) بعد التحقق من استيفاء شروط النظرية (3.2):

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , & -\pi \leq x < 0 \ , \ f(x+2\pi) = f(x) \\ \sin x \ , & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

(13) $f(x) = x^2 \ , \ -2 \leq x \leq 2 \ , \ f(x+4) = f(x)$

(14) $f(x) = |x| \ , \ -\pi \leq x \leq \pi \ , \ f(x+2\pi) = f(x)$

(15) $f(x) = \sin^2 2x \ , \ -\pi \leq x \leq \pi \ , \ f(x+2\pi) = f(x)$

(16) $f(x) = e^x \ , \ -1 \leq x < 1 \ , \ f(x+2) = f(x)$

(17) $f(x) = x^3 \ , \ -1 \leq x < 1 \ , \ f(x+2) = f(x)$

(18) حدد نوع التقارب $S_n \to f$ في كل من التمارين من (12) إلى (17) من حيث انتظامه.

(19) احسب قيمة المتسلسلة $S(x)$ في التمرين (16) عند $x = 1$ وفي التمرين (17) عند $x = 1$.

(20) استخدم مفكوك فورير للدالة $f(x) = x$ على $[-\pi,\pi)$ للحصول على

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

(21) استخدم نتيجة التمرين (14) للحصول على متسلسلة تمثل العدد $\pi^2$.

(22) استخدم منشور الدالة v في المثال (3.2) للحصول على منشور للعدد $\pi$.

(23) أثبت أن

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x + \cdots + (-1)^n \frac{4}{n^2}\cos nx + \cdots$$

حيث $-\pi < x \leq \pi$. استنتج من ذلك قيم المتسلسلات

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

(24) افرض أن f دالة ملساء قطعيًا على $[0,\ell]$. يعرَّف **الاعتداد الزوجي الدوري** (even periodic extension) للدالة f بأنه الدالةالدورية في $2\ell$ **المعرفة على** $(-\ell,\ell]$ بالشكل

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x)\,, 0 < x \leq \ell \\ f(-x)\,, -\ell < x \leq 0 \end{cases}$$

كما يعرف **الامتداد الفردي الدوري** (odd periodic extension) للدالة f بأنه الدالة الدورية في $2\ell$ المعرفة على $(-\ell,\ell]$ بالشكل

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x)\,, 0 < x \leq \ell \\ -f(-x)\,, 0 < x \leq 0 \end{cases}$$

استنتج مفكوك فورير لكل من $f_e$ و $f_0$.

(25) إذا كانت الدالة f متصلة على $[0,\ell]$ فأثبت أن $f_e$ أيضا متصلة على $\mathbb{R}$، ولكن $f_0$ متصلة إذا وفقط إذا كان $f(0) = f(\ell) = x$.

(26) باعتبار $f(x) = x$ علي $[0,1]$ احسب مفكوك فوريير لكل من $f_e$ و $f_0$ موضحا إجابتك بالرسم.

(27) أوجد مفكوك فوريير بالصيغة الأسية للدالة

$$f(x) = e^{ax} \ , \ -\pi < x < \pi$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

(28) أوجد مفكوك فوريير للدالة

$$f(x) = \cos^3 x \ , x \in \mathbf{R}$$

(29) أوجد مفكوك فوريير بالصيغة الأسية للدالة

$$f(x) = x^2 \ , \ -2 < x < 2$$

$$f(x + 4) = f(x)$$

وقارن ما تحصل عليه بنتيجة التمرين (13).

② (i) متصل قطعيا
(ii) ملساء قطعيا
(iii) متصلة قطعيا
(iv) ملساء قطعيا
(v) ملساء قطعيا

⑲ في تمرين ⑰ : $S(1) = 0$

㉑ $\pi^2 = 8 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2}$

㉓ عوض عن $x = 0$ ثم $x = \pi$

⑮ $f(x) = \sin^2(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)$

⑳ $X = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$

ضع $x = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{\cancel{2}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin \frac{n\pi}{2}}{n}$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1-1} (-1)^{\frac{2k+1-1}{2}}}{2k+1}$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k} (-1)^{k}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{2k+1}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

⑭ $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

㉑ ضع $x=0$ : $\pi^2 = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \Leftarrow \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

* وعلى ضوء ماسبق فإن مفكوك فورير للدالة $f_e(x)$ :

$$f_e(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx \quad ، \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

ومفكوك فورير للدالة $f_o(x)$ هو :

$$f_o(x) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

س 26

مثال : أوجد مفكوك فورير للدالة $f_e(x)$ و $f_o(x)$ بحيث

$f(x) = x$ و $x \in (0,1)$ . موضحاً ذلك بالرسم ؟

- الحل -

$$f_e(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\pi x \qquad a_0 = 2\int_0^1 x\,dx = 1$$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx = 2\left[\frac{x\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\,dx\right]$$

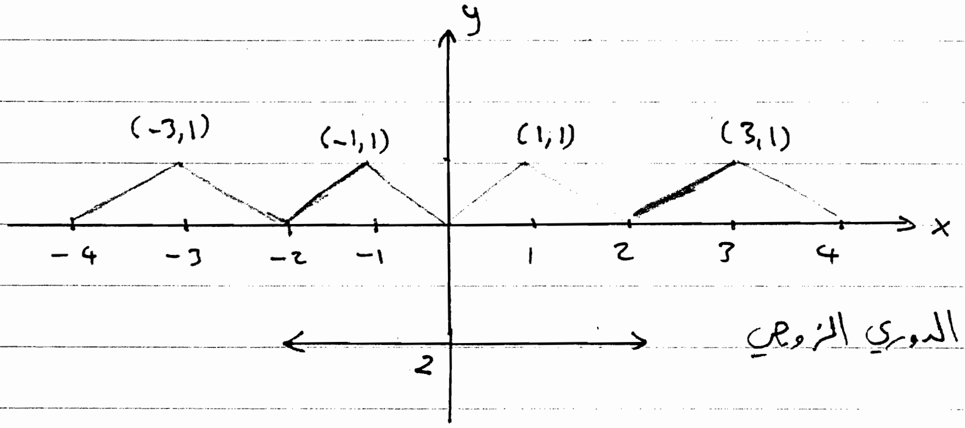
$$= \frac{-2}{n\pi}\left[\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 & n \text{ زوجي} \\ \frac{4}{\pi^2 n^2} & n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$f_e(x) \simeq \frac{1}{2} \mp \frac{4}{\pi^2} \cos \pi x \mp \frac{4}{3^2\pi^2} \cos 3\pi x \mp \cdots$$

$$\cdots \mp \frac{4}{(2n+1)\pi^2} \cos (2n+1)\pi x$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} \cos (2n+1)\pi x$$



الامتداد الدوري الزوجي

الآن الامتداد الفردي الدوري :

$$f_o(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ x & -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$f_o(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin n\pi x$$

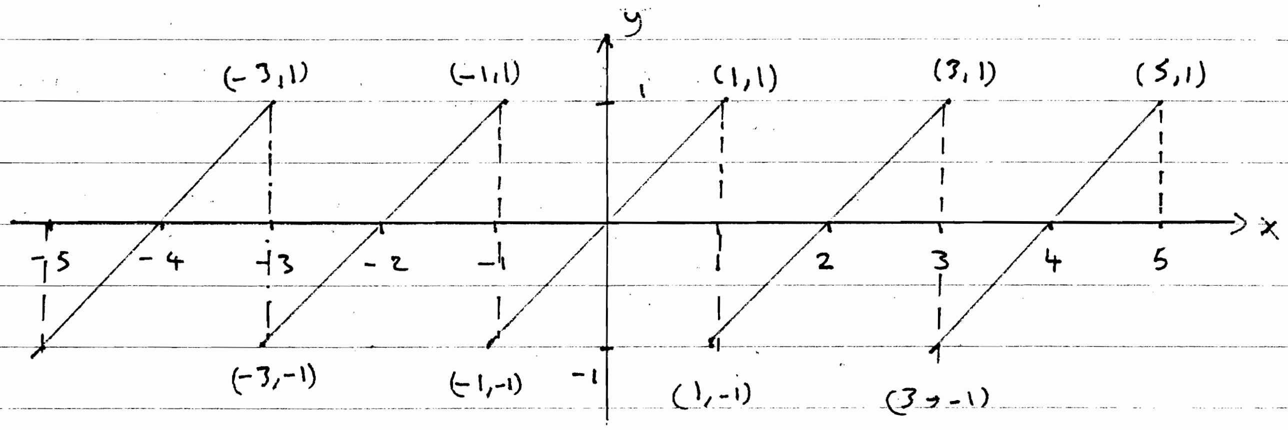
$$b_n = 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx = 2\int_0^1 x \sin n\pi x \, dx$$

$$= 2\left[ \frac{-x}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^1 + \cancel{\int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{n\pi} dx} \right]^{0}$$

$$b_n = \frac{-2}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} 0 & n \text{ زوجي} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$f_o(x) = \frac{4}{\pi}\sin \pi x + \frac{4}{3\pi}\sin 3\pi x + \dots + \frac{4}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)\pi x$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x}{2n+1}$$



## تمارين (4.1)

(1) تحقق من أن $P_n(x)$ حل لمعادلة لوجاندر (4.10) في الحالات الخاصة $n = 3$ ، $n = 4$.

(2) استخدم طريقة قرام - شميدت لتحويل المجموعة المستقلة

$$\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 : -1 \le x \le 1\}$$

إلى مجموعة متعامدة. قارن بين النتيجة وكثيرات حدود لوجاندر $\{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$.

(3) أثبت أن $Q_1(x) = 1 - \frac{x}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

(4) استنتج من الصيغة (4.9) أن

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 , \quad P_{2n+1}(0) = 0$$

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

(5) استخدم صيغة ذي الحدين

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}$$

والعلاقة (4.9) للحصول على **صيغة رودريقس** (Rodrigues Formula)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n]$$

(6) تحقق من أن الدالة $P_n$ ، المعطاة بصيغة رودريقس ، تحقق معادلة لوجاندر بالتعويض المباشر.

(7) أثبت أن التعويض $x = \cos\theta$ يحول معادلة لوجاندر إلى الشكل

$$\sin\theta \frac{d^2y}{d\theta^2} + \cos\theta \frac{dy}{d\theta} + n(n+1)\sin\theta y = 0$$

حيث $0 \le \theta \le \pi$ . لاحظ ظهور دالة الثقل $\sin\theta$ في هذه الصيغة.

لا يكتب ف
هذا الهامـ

④ الصيغة $P_{2n+1}(0)=0$ تأتي من الخاصية أن $P_n$ دالة زوجية عندما $n$ زوجي، وفردية عندما $n$ فردي.

$$P_{2n}(0)=a_0=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^n n! n!}=(-1)^n\frac{(2n-1)\cdots(3)(1)}{(2n)\cdots(4)(2)}$$

③
$$G_1(x)=x\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)-1$$
$$=\frac{x}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1$$

⑤ من العلاقة 4.9 نحصل على:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}x^{n-2k}$$

ثم نكمل الحل بلات الكرسي.

(*b*) The eigenfunctions are given by

$$\phi_n(x) = B_n \sin \sqrt{\lambda_n}\, x \tag{3}$$

where $\lambda_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, represent the eigenvalues obtained in part (*a*). To normalize these we require

$$\int_0^L B_n^2 \sin^2 \sqrt{\lambda_n}\, x \, dx = 1$$

i.e.

$$\frac{B_n^2}{2} \int_0^L (1 - \cos 2\sqrt{\lambda_n}\, x)\, dx = 1$$

or

$$B_n^2 = \frac{4\sqrt{\lambda_n}}{2\sqrt{\lambda_n}\, L - \sin 2\sqrt{\lambda_n}\, L} \tag{4}$$

Thus a set of normalized eigenfunctions is given by

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{4\sqrt{\lambda_n}}{2\sqrt{\lambda_n}\, L - \sin 2\sqrt{\lambda_n}\, L}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, x \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

(*c*) If $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$, then

$$c_n = \int_0^L f(x)\, \phi_n(x)\, dx = \sqrt{\frac{4\sqrt{\lambda_n}}{2\sqrt{\lambda_n}\, L - \sin 2\sqrt{\lambda_n}\, L}} \int_0^L f(x) \sin \sqrt{\lambda_n}\, x \, dx \tag{6}$$

Thus the required expansion is that with coefficients given by (*6*). The expansion for $f(x)$ can equivalently be written as

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{\lambda_n}}{2\sqrt{\lambda_n}\, L - \sin 2\sqrt{\lambda_n}\, L} \left\{ \int_0^L f(x) \sin \sqrt{\lambda_n}\, x \, dx \right\} \sin \sqrt{\lambda_n}\, x \tag{7}$$

## GRAM-SCHMIDT ORTHONORMALIZATION PROCESS

2/5 ← **3.12.** Generate a set of polynomials orthonormal in the interval $(-1, 1)$ from the sequence $1, x, x^2, x^3, \ldots$.

According to the Gram-Schmidt process we consider the functions

$$\phi_1(x) = c_{11}, \quad \phi_2(x) = c_{21} + c_{22}x, \quad \phi_3(x) = c_{31} + c_{32}x + c_{33}x^2, \quad \ldots$$

Since $\phi_2(x)$ must be orthogonal to $\phi_1(x)$ in $(-1, 1)$, we have

$$\int_{-1}^{1} (c_{11})(c_{21} + c_{22}x)\, dx = 0 \qquad \text{i.e.} \quad c_{11}(2c_{21}) = 0$$

from which $c_{21} = 0$, because $c_{11} \neq 0$. Thus we have

$$\phi_1(x) = c_{11} \qquad \phi_2(x) = c_{22}x$$

In order that $\phi_1(x)$ and $\phi_2(x)$ be normalized in $(-1, 1)$ we must have

$$\int_{-1}^{1} (c_{11})^2\, dx = 1 \qquad \int_{-1}^{1} (c_{22}x)^2\, dx = 1$$

from which

$$c_{11} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \qquad c_{22} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Since $\phi_3(x)$ must be orthogonal to $\phi_1(x)$ and $\phi_2(x)$ in $(-1, 1)$, we have

$$\int_{-1}^{1} (c_{11})(c_{31} + c_{32}x + c_{33}x^2)\, dx = 0, \qquad \int_{-1}^{1} (c_{22}x)(c_{31} + c_{32}x + c_{33}x^2)\, dx = 0$$

from which

$$2c_{31} + \tfrac{2}{3}c_{33} = 0 \quad \text{or} \quad c_{33} = -3c_{31}, \; c_{32} = 0$$

Thus

$$\phi_3(x) = c_{31}(1 - 3x^2)$$

In order that $\phi_3(x)$ be normalized in $(-1,1)$ we must have

$$\int_{-1}^{1}[c_{31}(1-3x^2)]^2\,dx = 1 \qquad \text{whence} \qquad c_{31} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$$

The orthonormal functions thus far are given by

$$\phi_1(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \phi_2(x) = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad \phi_3(x) = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3x^2-1}{2}\right)$$

By continuing the process (see Problem 3.29) we find

$$\phi_4(x) = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\left(\frac{5x^3-3x}{2}\right), \quad \phi_5(x) = \pm\sqrt{\frac{9}{2}}\left(\frac{35x^4-30x^2+3}{8}\right), \quad \ldots$$

From these we obtain the *Legendre polynomials*

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2},$$

$$P_4(x) = \frac{35x^4-30x^2+3}{8}, \quad \ldots$$

The polynomials are such that $P_n(1) = 1$, $n = 0,1,2,3,\ldots$. We shall investigate Legendre polynomials and applications in Chapter 7.

## APPLICATIONS TO BOUNDARY VALUE PROBLEMS

**3.13.** A thin conducting bar whose ends are at $x = 0$ and $x = L$ has the end $x = 0$ at temperature zero, while at the end $x = L$ radiation takes place into a medium of temperature zero. Assuming that the surface is insulated and that the initial temperature is $f(x)$; $0 < x < L$, find the temperature at any point $x$ of the bar at any time $t$.

The heat conduction equation for the temperature in a bar whose surface is insulated is

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

Assuming Newton's law of cooling applies at the end $x = L$, we obtain the condition

$$-Ku_x(L,t) = h[u(L,t)-0]$$

or

$$u_x(L,t) = -\beta u(L,t) \tag{2}$$

where $\beta = K/h$, $K$ being the thermal conductivity and $h$ a constant of proportionality. The remaining boundary conditions are given by

$$u(0,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad |u(x,t)| < M$$

To solve this boundary value problem we let $u = XT$ in (*1*) to obtain the solution

$$u = e^{-\kappa\lambda^2 t}(A\cos\lambda x + \beta\sin\lambda x)$$

From $u(0,t) = 0$ we find $A = 0$, so that

$$u(x,t) = Be^{-\kappa\lambda^2 t}\sin\lambda x$$

The boundary condition (*2*) yields

$$\tan\lambda L = -\frac{\lambda}{\beta} \tag{3}$$

This equation is exactly the same as (*1*) on page 60 with $\lambda$ replaced by $\lambda^2$. Denoting the $n$th positive root of (*3*) by $\lambda_n$, $n = 1,2,3,\ldots$, we see that solutions are

$$u(x,t) = B_n e^{-\kappa\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x$$

Using the principle of superposition we then arrive at a solution

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\kappa\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x$$

3. From the definition of a Legendre polynomial show that

   (a) $P_{2n}(0)=(-1)^n\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

   (b) $P_{2n+1}(0)=0$.

4. By first differentiating the Legendre polynomial $P_{2n}(x)$, show that $P'_{2n}(0)=0$.

5. (a) Determine the polynomial solution $CP_n(x)$ of the differential equation

$$(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$$

   (b) If the positive value is chosen for $n$ in (a) and $y(0)=2$, what is the solution of the resulting IVP assuming that the solution is a valid one when $x=1$?

6. Extend the graph for $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ and $P_4(x)$ in Figure 8.1$a$ for $-1\leqslant x<0$.

## 8.2. RODRIGUES' FORMULA FOR LEGENDRE POLYNOMIALS

6

To develop this formula we let

$$w=(x^2-1)^n$$

Differentiating, we have

$$\frac{dw}{dx}=2nx(x^2-1)^{n-1}$$

This we multiply by $x^2-1$, so that

$$(1-x^2)\frac{dw}{dx}+2nxw=0 \tag{8.11}$$

Differentiating (8.11), one obtains

$$(1-x^2)\frac{d^2w}{dx^2}+2(n-1)x\frac{dw}{dx}+2nw=0$$

Continuing the differentiation, we see that

$$(1-x^2)\frac{d^3w}{dx^3}+2(n-2)x\frac{d^2w}{dx^2}+2(2n-1)\frac{dw}{dx}=0$$

$_n(x)$; ($b$) Legendre
permission of John

and

$$(1-x^2)\frac{d^4w}{dx^4}+2(n-3)x\frac{d^3w}{dx^3}+3(2n-2)\frac{d^2w}{dx^2}=0$$

Differentiating $k+1$ times, we find that

$$(1-x^2)\frac{d^2w^{(k)}}{dx^2}+2(n-k-1)x\frac{dw^{(k)}}{dx}+(k+1)(2n-k)w^{(k)}=0 \quad (8.12)$$

where

$$w^{(k)}=\frac{d^kw}{dx^k}$$

If we let $k=n$ in (8.12), then

$$(1-x^2)\frac{d^2w^{(n)}}{dx^2}-2x\frac{dw^{(n)}}{dx}+n(n+1)w^{(k)}=0 \quad (8.13)$$

From (8.13) we see that $Kw^{(n)}$ is a solution for the Legendre differential equation. Assuming that the Legendre polynomials form a unique polynomial solution set for (8.1) except for multiplicative constants,

$$P_n(x)=K\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad (8.14)$$

We investigate the highest power of $x$ for each member of (8.14). We recall tha $C_n$ is

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

and

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n=K\frac{d^nx^{2n}}{dx^n}=K(2n)(2n-1)\cdots(2n-n+1)x^n$$

$$=K\frac{(2n)!}{n!}x^n$$

Therefore,

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}=K\frac{(2n)!}{n!}$$

$$\Rightarrow K=\frac{1}{2^n n!}$$

ومنه نحصل على صيغة رودريغس لكثيرات حدود ليجندر

and

$$1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n$$

Thus, for all coefficients of $t^n$,

$$P_n(1)=1$$

The coefficients (8.7) were assigned so that $P_n(1)=1$. It can be shown that for $-1\leqslant x\leqslant 1$,

$$|P_n(x)|\leqslant 1$$

## 8.4. THE LEGENDRE POLYNOMIAL $P_n(\cos\theta)$

If we replace the independent variable $x$ with $\theta$ in (8.1) using the substitution

$$x=\cos\theta$$

then we obtain

$$\frac{dy}{dx}=-\csc\theta\frac{dy}{d\theta}$$

and

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\csc^2\theta\left[\frac{d^2y}{d\theta^2}-\frac{\cos\theta\, dy}{\sin\theta\, d\theta}\right]$$

The new equation becomes

$$\sin\theta\frac{d^2y}{d\theta^2}+\cos\theta\frac{dy}{d\theta}+n(n+1)\sin\theta y=0 \tag{8.24}$$

Equation (8.24) has a solution

$$y=P_n(\cos\theta) \tag{8.25}$$

The form of the Legendre differential equation (8.24) with the solution (8.25) is frequently useful for solving BVPs.

### Exercises 8.2

1. Solve for $P_{n+1}(x)$ in (8.23) and then determine
   (a) $P_2(x)$, (b) $P_3(x)$, and (c) $P_4(x)$.

2. Using Rodrigues' formula, verify $P_0(x)$, $P_1(x)$, and $P_2(x)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)t^n = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

فنحصل على المطلوب بمقارنة معاملات القوى $t^n$.

## تمارين (4.2)

(1) أثبت أن

$$\frac{1}{|re^{i\theta}-1|} = \frac{1}{\sqrt{r^2-2r\cos\theta+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) r^n$$

حيث $r < 1$، ثم استنتج أن

$$\frac{1}{\|v_2 - v_1\|} = \frac{1}{\|v_2\|} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \left\| \frac{v_1}{v_2} \right\|^n$$

لأي متجهين $v_1$ و $v_2$ في المستوي بينهما الزاوية $\theta$ بحيث $\left\| \frac{v_1}{v_2} \right\| < 1$

(2) أثبت أن

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ثم استنتج أن

$$\int_1^x P_n(t)dt = \frac{1}{(2n+1)}[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)]$$

(3) أثبت أن

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(4) أثبت أن

$$(n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

(5) أثبت أن

$$xP'_n(x) = nP_n(x) + P'_{n-1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(6) مثل كلا من الدوال التالية بمتسلسلة لوجاندر

(i) $f(x) = x^2$

(ii) $f(x) = 1 - x^3$

(7) احسب الحدود الخمسة الأولى من منشور لوجاندر للدالة $f(x) = |x|$ على الفترة $[-1,1]$.

(8) أوجد منشور لوجاندر للدالة

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , -1 < x < 0 \\ 1 & , \ 0 < x < 1 \end{cases}$$

مستخدما نتيجة التمرين 4.2.2. احسب قيمة المتسلسلة عند $x = 0$ وقارن ذلك بمتوسط النهايتين $f(0^+)$ و$f(0^-)$.

(9) ابحث التقارب النقطي لسلاسل لوجاندر في التمرينين 4.2.7 و 4.2.8 عند $x = \pm 1$. هل التقارب منتظم على الفترة $[-1,1]$؟

## (4.4) كثيرات حدود هرميت ولاقير

### أولا: كثيرات حدود هرميت

تعرّف كثيرة حدود هرميت $H_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، نسبة إلى الرياضي الفرنسي C. Hermite (1822-1901)، بالصيغة

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{4.17}$$

ومنها نحصل على المتتالية

$$H_0(x) = 1, \ H_1(x) = 2x, \ H_2(x) = 4x^2 - 2, \ H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, \ H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x, \ldots$$

كما نستنتج من التعريف (4.17) أن $H_n$ تتمتع بالخواص التالية :

لا يكتب في
هذا الهامش

(ح) استعمل صيغة رودريقيس من أجل $P_n$ واستبدل n بـ n+1 لتحصل على:

$$P'_{n+1} = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left((2n+1)x^2-1\right)(x^2-1)^{n-1}\right],$$

ثم اشتقه $P_{n-1}$ واطرح

التكامل يأتي من الصيغة التي أثبتناها هنا في هذا التمرين ومن المساواة $P_n(\pm1)=(\pm1)^n$

(7) (ii) $1-x^3 = P_0(x) - \frac{3}{5}P_1(x) - \frac{2}{5}P_3(x)$.

(8) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ حيث $c_n = \frac{(2n+1)}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$

حيث أن f فردية فإن $c_n = 0$ للقيم الزوجية لـ n

من أجل $n=2k+1$:

$$c_{2k+1} = (4k+3)\int_0^1 P_{2k+1}(x)dx$$

$$= (4k+3)\frac{1}{4k+3}\left[P_{2k}(0) - P_{2k+2}(0)\right]$$

$$= (-1)^k\left[\frac{(2k)!}{2^{2k}k!\,k!} + \frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}(k+1)!\,(k+1)!}\right]$$

$$= (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}k!\,k!}\frac{(4k+3)}{(2k+2)}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

وهكذا:

$$f(x) = \frac{3}{2}P_1(x) - \frac{7}{8}P_3(x) + \frac{11}{16}P_5(x) + \cdots$$

عندما $x=0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(0) = 0 = \frac{1}{2}\left[f(0^+) + f(0^-)\right]$$

(5) من تمرين 2 و تمرين 4

(6) (i) ضع $x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ حيث $c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 P_n(x)dx$

$c_0 = \frac{1}{3}, \; c_1 = 0, \; c_2 = \frac{2}{3}, \; c_n = 0 \quad \forall\, n \geq 3$

and

$$K=\frac{1}{2^n n!}$$

As a result,

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{8.15}$$

Equation (8.15) is known as *Rodrigues' formula* for generating Legendre polynomials.

**Example 8.1.** Show that

س2

$$(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)$$

From (8.15) we obtain

$$\begin{aligned}P'_n(x)&=\frac{2n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[x(x^2-1)^{n-1}\right]\\ &=\frac{2n}{2^n n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(2n-2)x^2(x^2-1)^{n-2}+(x^2-1)(x^2-1)^{n-2}\right]\\ &=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left((2n-1)x^2-1\right)(x^2-1)^{n-2}\right]\end{aligned} \tag{8.16}$$

Replacing $n$ with $n+1$ in (8.16), we write

$$P'_{n+1}(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left((2n+1)x^2-1\right)(x^2-1)^{n-1}\right] \tag{8.17}$$

From (8.15),

$$P_{n-1}(x)=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^{n-1}$$

The derivative of $P_{n-1}(x)$ is

$$P'_{n-1}(x)=\frac{2n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^{n-1} \tag{8.18}$$

The difference (8.17)−(8.18) is

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left((2n+1)x^2-1\right)(x^2-1)^{n-1}-2n(x^2-1)^{n-1}\right] \\ &= \frac{2n+1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \\ &= (2n+1)P_n(x) \end{aligned}$$

or

$$(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x) \tag{8.19}$$

## 8.3. A GENERATING FUNCTION FOR $P_n(x)$

It can be shown that the coefficient of $t^n$ in the expansion of

$$[1-2xt+t^2]^{-1/2}$$

is the Legendre polynomial $P_n(x)$. We write a few terms of the expansion

$$\begin{aligned} [1-t(2x-t)]^{-1/2} &= 1+\tfrac{1}{2}t(2x-t)+\frac{1\cdot 3}{2^2 2!}t^2(2x-t)^2 \\ &+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}t^3(2x-t)^3+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}t^n(2x-t)^n+\cdots \end{aligned}$$

The term $t^n$ appears in the term $t^n(2x-t)^n$ and in preceding terms. The coefficient of $t^n$ is a finite series which we display:

$$\begin{aligned} &\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}(2x)^n-\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}\cdot\frac{n-1}{1!}(2x)^{n-2} \\ &+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-5)}{2^{n-2}(n-2)!}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} \\ &-\frac{1\cdot 3\cdots(2n-7)}{2^{n-3}(n-3)!}\cdot\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{3!}(2x)^{n-6}+\cdots \end{aligned}$$

By appropriate factorial arithmetic and other simplifications this series has the form:

$$\begin{aligned} &\frac{(2n)!}{2^n n!n!}x^n-\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!}x^{n-2}+\frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!}x^{n-4} \\ &-\frac{(2n-6)!}{2^n 3!(n-3)!(n-6)!}x^{n-6}+\cdots \end{aligned} \tag{8.20}$$

However, (8.20) represents the first few terms of $P_n(x)$ in (8.10). It is suggestive that

$$[1-2xt+t^2]^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \tag{8.21}$$

The expression

$$[1-2xt+t^2]^{-1/2}$$

is referred to as a *generating function* for the Legendre polynomial $P_n(x)$.

3/2

**Example 8.2.** Show that

$$(2n+1)xP_n(x)=(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)$$

Differentiating (8.21) relative to $t$, we have

$$(x-t)(1-2xt+t^2)^{-3/2}=\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} \tag{8.22}$$

If we multiply (8.22) by $1-2xt+t^2$, then

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-t)P_n(x)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1-2xt+t^2)nP_n(x)t^{n-1}$$

or

$$\sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)t^n-\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty} 2nxP_n(x)t^n+\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1}$$

If we equate coefficients of $t^n$, then

$$xP_n(x)-P_{n-1}(x)=(n+1)P_{n+1}(x)-2nxP_n(x)+(n-1)P_{n-1}(x)$$

Collecting coefficients of $P_n(x)$ and $P_{n-1}(x)$, one obtains

$$(2n+1)xP_n(x)=(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x) \tag{8.23}$$

**Example 8.3.** Show that $P_n(1)=1$.

From (8.21), if $x=1$, then

$$(1-2t+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n$$

$$(1-t)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n$$

$$L_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$$

$$L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

$$\vdots$$

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \qquad (4.28)$$

ونلاحظ على الفور أن لكل $m < n$ فإن

و
س
التالي ذكره

$$\begin{aligned}\langle x^m, L_n \rangle &= \int_0^\infty e^{-x} x^m L_n(x)dx \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^m \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})dx \\ &= (-1)^m \frac{m!}{n!}\int_0^\infty \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^n e^{-x})dx \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle L_m , L_n \rangle = 0 \quad \forall m \neq n$$

لأن $L_m$ كثيرة حدود من الدرجة m (تمرين 4.3.12). كما أن

$$\langle x^n, L_n \rangle = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-x}dx = (-1)^n n!$$

وبما أن معامل $x_n$ في كثيرة الحدود $L_n$ هو $(-1)^n/n!$ فإن

$$||L_n||^2 = \frac{(-1)^n}{n!}\langle x^n, L_n \rangle = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فنستنتج من ذلك أن **كثيرات حدود لاقير** $L_n$ متعامدة عياريا في $\mathcal{L}^2(0,\infty; e^{-x})$.

## تمارين (4.3)

(1) أثبت أن $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ بتحويل التكامل

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

بالنسبة للاحداثيات الديكارتية $(x,y)$ إلى تكامل بالنسبة للإحداثيات القطبية $(r,\theta)$.

(2) أثبت أن كثيرة الحدود $H_n$ مكونة من قوى زوجية أو فردية متبعا للعدد n.

(3) أثبت أن

$$H_n(x) = n!\sum_{k\le n/2}\frac{(-1)^k(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

بالاستقراء على n.

(4) أوجد منشور الدالة

$$f(x)=\begin{cases}0 \;, & x<0\\ 1 \;, & x>0\end{cases}$$

بدلالة كثيرات حدود هرميت (استخدم التمرين 4.3.3).

(5) عبر عن دالة $f(x) = x^4$ بكثيرات حدود هرميت.

(6) تسمى المعادلة التفاضلية

$$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$$

أيضا معادلة هرميت. بافتراض أن $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r}$ والتعويض في المعادلة استنتج أن

$$c_{k+2} = \frac{2(k+r-\lambda)}{(k+r+2)(k+r+1)}c_k$$

وأن $r(r-1) = 0$. ثم أثبت أن الحل المناظر للقيمة $r = 0$ هو

$$y_0(x) = c_0\left[1-\frac{2\lambda}{2!}x^2+\frac{2^2\lambda(\lambda-2)}{4!}x^4-\cdots\right]$$

حيث $c_0$ ثابت، وأن الحل المناظر للقيمة $r = 1$ هو

$$y_1(x) = c_1\left[x-\frac{2(\lambda-1)}{3!}x^3+\frac{2^2(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}x^5+\cdots\right]$$

حيث $c_1$ ثابت ، فيكون الحل العام للمعادلة

$$y = y_0(x) + y_1(x)$$

لاحظ أن كلا من $y_0$ و $y_1$ متسلسلة غير منتهية (الأولى زوجية والثانية فردية) إلا عندما يكون λ عددا صحيحا غير سالب ، وعندئذ يصبح أحد الحلين كثيرة الحدود $H_n$ (باختيار مناسب للثابت).

(7) أثبت أن كلا من الدالتين $e^{-x2}y_0(x)$ و $e^{-x2}y_1(x)$ تقترب من عدد ثابت عندما $|x|\to\infty$ ، وأن هذا العدد الثابت يساوي الصفر عندما يكون الحل كثيرة الحدود $H_n$. ثم استنتج من ذلك أن أي حل y لمعادلة هرميت يحقق

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} y^2(x)dx < \infty$$

إذا وفقط إذا كان $y = H_n$.

(8) أثبت أن الدالة $\psi_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x)$ تحقق المعادلة

$$\psi_n'' + [(2n+1) - x^2]\psi_n = 0$$

المعروفة **بمعادلة شرودنقر** (Schrödinger's equation).

تسمى ψ **دالة هرميت** ذات الرتبة n.

(9) تحقق من تعامد الدوال $L_0$ ، $L_1$ ، $L_2$ على الفترة $[0,\infty)$ بالنسبة لدالة الثقل $e^{-x}$.

(10) أثبت أن

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}x^k$$

(11) عبر عن الدالة $f(x) = x^3 - x$ بدلالة كثيرات حدود لاقير.

(12) أثبت أن $L_n$ كثيرة حدود من الدرجة n.

(13) أوجد منشور لاقير للدالة $f(x) = x^m$ حيث $m\in\mathbb{N}$ على الفترة $[0,\infty)$.

(14) أوجد منشور لاقير للدالة $f(x) = e^{x/2}$ ، $0 \le x < \infty$.

(15) أثبت أن كثيرة الحدود $L_n$ تحقق المعادلة (4.26).

(16) أوجد الحل الكامل لمعادلة لاقير

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

عندما $n = 0$، $n = 1$.

## (4.5) تطبيق فيزيائي

تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f \qquad (4.29)$$

**معادلة بواسون**، وهي تمثل نموذجا رياضيا ملائما لوصف العديد من الظواهر الطبيعية، مثل المجال الكهروستاتيكي الناتج من توزيع الشحنة الكهربائية $f(x,y,z)$ في الفضاء الثلاثي. وفي نطاق خال من الشحنات، نرمز له بـ $\Omega$، تأخذ المعادلة (4.29) الصورة المتجانسة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (4.30)$$

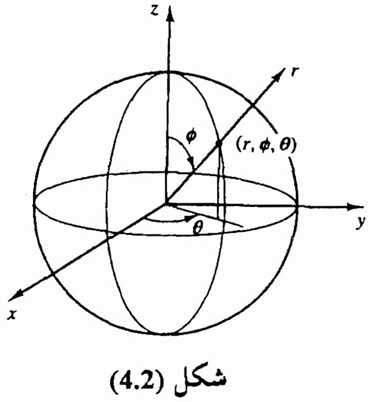
التي تعرف **بمعادلة لابلاس**، نسبة إلى الرياضي الفرنسي P.S. de Laplace (1749-1827)، وتسمى حلولها في $C^2(\Omega)$ **دوال توافقية** (harmonic functions) على $\Omega$. إذا أجرينا التحويل من الإحداثيات الديكارتية $(x, y, z)$ إلى الإحداثيات الكروية $(r, \theta, \varphi)$، المعرف بالمعادلات

$$x = r\cos\theta\sin\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\varphi$$

حيث $r > 0, 0 \le \theta < 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi$



شكل (4.2)

(١)

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy$$

$$= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{r^2}\cdot r\,dr\,d\theta = \pi$$

(٢) استبدل $t$ بـ $-t$ في العلاقة:

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x)\, t^n , \quad \forall\, x, t \in \mathbb{R}$$

لتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x)(-t)^n = e^{-2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(-x)\, t^n,$$

والذي يؤدي إلى:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

(٥) بشكل أعم، إذا كان $(m=2n$

$$x^{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{H_{2k}(x)}{(2k)!\,(n-k)!}$$

وإذا كان $m=2n+1$

$$x^{2n+1} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{H_{2k+1}(x)}{(2k+1)!\,(n-k)!} , \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$$

(١٠) استخدم قاعدة لايبنتز لمشتقة الضرب

$$(fg)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

حيث $f(x) = x^n$ و $g(x) = e^{-x}$

(١٣) $x^m = \sum_{n=0}^{m} c_n L_n(x)$ حيث،

$$c_n = \int_0^{\infty} e^{-x} x^m L_n(x)\, dx = (-1)^n \frac{m!\,m!}{n!\,(m-n)!}$$

$$u(x) = c_1 + c_2 \int \frac{e^x}{x} dx = c_1 + c_2\left(\log x + x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \cdots\right)$$

⑯ $u(x) = c_1 + c_2 \int \frac{e^x}{x} dx$

$= c_1 + c_2 \left( \log x + x + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!} + \cdots \right)$

١٧) من 10 س : واضح أن الحدود تنعدم بعد n حداً
لذا فإن $P_n(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n

Multiplying by $e^{-x^2}$ and integrating from $-\infty$ to $\infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(x+s+t)^2-2st]}\,dx \quad=\quad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^m t^n}{m!\,n!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)\,H_n(x)\,dx$$

Now the left side is equal to

$$e^{2st}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+s+t)^2}\,dx \quad=\quad e^{2st}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du \quad=\quad e^{2st}\sqrt{\pi} \quad=\quad \sqrt{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m s^m t^m}{m!}$$

By equating coefficients the required result follows.

The result

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)\,H_n(x)\,dx \quad=\quad 0 \qquad m \neq n$$

can also be proved by using a method similar to that of Problem 7.13, page 138 (see Problem 8.24).

**8.5.** Show that the Hermite polynomials satisfy the differential equation

$$y'' - 2xy' + 2ny \;=\; 0$$

From (*5*) and (*6*), page 154, we have on eliminating $H_{n-1}(x)$:

$$H_{n+1}(x) \quad=\quad 2xH_n(x) \;-\; H_n'(x) \tag{1}$$

Differentiating both sides we have

$$H_{n+1}'(x) \quad=\quad 2xH_n'(x) \;+\; 2H_n(x) \;-\; H_n''(x) \tag{2}$$

But from (*6*), page 154, we have on replacing $n$ by $n+1$:

$$H_{n+1}'(x) \quad=\quad 2(n+1)\,H_n(x) \tag{3}$$

Using (*3*) in (*2*) we then find on simplifying:

$$H_n''(x) \;-\; 2xH_n'(x) \;+\; 2nH_n(x) \quad=\quad 0$$

which is the required result.

We can also proceed as in Problem 8.25.

**8.6.** (*a*) If $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k H_k(x)$ show that $A_k \;=\; \dfrac{1}{2^k k!\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}f(x)\,H_k(x)\,dx.$

(*b*) Expand $x^3$ in a series of Hermite polynomials.

(*a*) If $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k H_k(x)$ then on multiplying both sides by $e^{-x^2}H_n(x)$ and integrating term by term from $-\infty$ to $\infty$ (assuming this to be possible) we arrive at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}f(x)\,H_n(x)\,dx \quad=\quad \sum_{k=0}^{\infty} A_k\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_k(x)\,H_n(x)\,dx \tag{1}$$

But from Problem 8.4

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_k(x)\,H_n(x)\,dx \quad=\quad \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 2^n n!\sqrt{\pi} & k = n \end{cases}$$

Thus (*1*) becomes

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}f(x)\,H_n(x)\,dx \quad=\quad A_n 2^n n!\sqrt{\pi}$$

or

$$A_n \quad=\quad \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}f(x)\,H_n(x)\,dx \tag{2}$$

which yields the required result on replacing $n$ by $k$.

(*b*) We must find coefficients $A_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, such that

$$x^3 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k H_k(x) \tag{3}$$

**Method 1.**

The expansion (*3*) can be written

$$x^3 = A_0H_0(x) + A_1H_1(x) + A_2H_2(x) + A_3H_3(x) + \cdots \tag{4}$$

or

$$x^3 = A_0(1) + A_1(2x) + A_2(4x^2-2) + A_3(8x^3-12x) + \cdots \tag{5}$$

Since $H_k(x)$ is a polynomial of degree $k$ we see that we must have $A_4 = 0$, $A_5 = 0$, $A_6 = 0$, $\ldots$; otherwise the left side of (*5*) is a polynomial of degree 3 while the right side would be a polynomial of degree greater than 3. Thus we have from (*5*)

$$x^3 = (A_0 - 2A_2) + (2A_1 - 12A_3)x + 4A_2x^2 + 8A_3x^3$$

Then equating coefficients of like powers of $x$ on both sides we find

$$8A_3 = 1, \quad 4A_2 = 0, \quad 2A_1 - 12A_3 = 0, \quad A_0 - 2A_2 = 0$$

from which

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \frac{3}{4}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \frac{1}{8}$$

Thus (*2*) becomes

$$x^3 = \frac{3}{4}H_1(x) + \frac{1}{8}H_3(x)$$

which is the required expansion.

***Check.***

$$\frac{3}{4}H_1(x) + \frac{1}{8}H_3(x) = \frac{3}{4}(2x) + \frac{1}{8}(8x^3 - 12x) = x^3$$

**Method 2.**

The coefficients $A_k$ in (*1*) are given by

$$A_k = \frac{1}{2^k k!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}x^3H_k(x)\,dx$$

as obtained in part (*a*) with $f(x) = x^3$.

Putting $k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ and integrating we then find

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \frac{3}{4}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \frac{1}{8}, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = 0, \quad \ldots$$

and we are led to the same result as in Method 1.

In general, for expansion of polynomials the first of the above methods will be easier and faster.

**8.7.** (*a*) Write Parseval's identity corresponding to the series expansion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_kH_k(x)$.
(*b*) Verify the result of part (*a*) for the case where $f(x) = x^3$.

(*a*) We can obtain Parseval's identity formally by first squaring both sides of $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_kH_k(x)$ to obtain

$$\{f(x)\}^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} A_kA_pH_k(x)\,H_p(x)$$

Then multiplying by $e^{-x^2}$ and integrating from $-\infty$ to $\infty$ we find

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\{f(x)\}^2\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} A_kA_p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_k(x)\,H_p(x)\,dx$$

---

## orthogonality of Laguerre polynomials

We use the definition of Laguerre polynomials $L_n(x)$ via their Rodrigues formula

$$L_n(x) \;:=\; e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}). \qquad (1$$

The polynomials (1) themselves are not orthogonal to each other, but the expressions $e$ $L_n(x)$ ($n = 0,\ 1,\ 2, \overset{x}{..}$) are orthogonal on the interval from 0 to $\infty$ , i.e. the polynomials are orthogonal with respect to t$\bar{\text{h}}$e weigh$\bar{\text{ti}}$ng function $e$ on that interval, as is seen in the following.

Let $m$ be another nonnegative integer. We integrate by parts $m$ times in

$$\int_0^\infty e^{-x}x^mL_n(x)\,dx \;=\; \int_0^\infty x^m\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\,dx \;=\; (-1)^m m!\int_0^\infty\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^m e^{-x})\,dx.$$

When $m < n$ , this yields

$$\int_0^\infty e^{-x}x^mL_n(x)\,dx \;=\; (-1)^m m!\;\Big/_{x=0}^{\infty}\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^me^{-x}) \;=\; 0. \qquad (2$$

and for $m = n$ it gives

$$\int_0^\infty e^{-x}x^mL_n(x)\,dx \;=\; (-1)^n n!\int_0^\infty x^ne^{-x}\,dx \;=\; (-1)^n(n!)^2. \qquad (3$$

The result (2) implies, because $L$ $(x)$ is a polynomial of degree $m$ , that

$$\int_0^\infty e_m^{-x}L_m(x)L_n(x)\,dx \;=\; 0 \quad (m \;<\; n),$$

whence also

$$\int_0^\infty e^{-x}L_m(x)L_n(x)\,dx \;=\; 0 \qquad (m \;\neq\; n). \qquad (4$$

Thus the orthogonality has been shown. Therefore, since the leading term of $L$ $(x)$ is $(-1)^n x$ ,
we infer by (3) and (4) that

$$n \qquad \int_0^\infty e^{-x}[L_n(x)]^2\,dx \;=\; (-1)^n\int_0^\infty e^{-x}x^nL_n(x)\,ds \;=\; (n!)^2,$$

so that the expressions $\frac{L_n(x)}{\phantom{n!}}$ form a system of orthonormal polynomials.

## Bibliography $n!$

1 H. EYRING, J. WALTER, G. KIMBALL: *Quantum chemistry*. Eight printing. Wiley & Sons, New York (1958).

orthogonality of Laguerre polynomials is owned by J. Pahikkala.

View style: jsMath HTML ▾ [ reload ]

### Parent

- Laguerre polynomial by Raymond Puzio

### How to Cite This Entry

J. Pahikkala. "orthogonality of Laguerre polynomials" (version 5). *PlanetMath.org*. Freely available at http://planetmath.org/OrthogonalityOfLaguerrePolynomials.html.

Making use of the results of Problem 8.4 this can be written as

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\{f(x)\}^2\,dx \quad = \quad \sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} 2^k k!\,A_k^2$$

which is Parseval's identity for the Hermite polynomials.

(*b*) From Problem 8.6 it follows that if $f(x) = x^3$ then $A_0 = 0$, $A_1 = \frac{3}{4}$, $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{1}{8}$, $A_4 = 0$, $A_5 = 0$, .... Thus Parseval's identity becomes

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\{x^3\}^2\,dx \quad = \quad \sqrt{\pi}\,[2(1!)(\tfrac{3}{4})^2 + 2^3(3!)(\tfrac{1}{8})^2]$$

Now the right side reduces to $15\sqrt{\pi}/8$. The left side is

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-x^2}\,dx \quad &= \quad 2\int_0^{\infty} x^6 e^{-x^2}\,dx \quad = \quad \int_0^{\infty} u^{5/2}e^{-u}\,du \\ &= \quad \Gamma(\tfrac{7}{2}) \quad = \quad (\tfrac{5}{2})(\tfrac{3}{2})(\tfrac{1}{2})\sqrt{\pi} \\ &= \quad \frac{15}{8}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

where we have made the transformation $x = \sqrt{u}$. Thus Parseval's identity is verified.

## LAGUERRE POLYNOMIALS

**8.8.** Determine the Laguerre polynomials (*a*) $L_0(x)$, (*b*) $L_1(x)$, (*c*) $L_2(x)$, (*d*) $L_3(x)$.

We have $L_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$. Then

(*a*) $L_0(x) \;=\; 1$

(*b*) $L_1(x) \;=\; e^x \dfrac{d}{dx}(xe^{-x}) \;=\; 1 - x$

(*c*) $L_2(x) \;=\; e^x \dfrac{d^2}{dx^2}(x^2e^{-x}) \;=\; 2 - 4x + x^2$

(*d*) $L_3(x) \;=\; e^x \dfrac{d^3}{dx^3}(x^3e^{-x}) \;=\; 6 - 18x + 9x^2 - x^3$

3/ **8.9.** Prove that the Laguerre polynomials $L_n(x)$ are orthogonal in $(0, \infty)$ with respect to the weight function $e^{-x}$.

From Laguerre's differential equation we have for any two Laguerre polynomials $L_m(x)$ and $L_n(x)$,

$$xL_m'' + (1-x)L_m' + mL_m \quad = \quad 0$$
$$xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n \quad = \quad 0$$

Multiplying these equations by $L_n$ and $L_m$ respectively and subtracting, we find

$$x[L_nL_m'' - L_mL_n''] + (1-x)[L_nL_m' - L_m'L_n] \quad = \quad (n-m)L_mL_n$$

or

$$\frac{d}{dx}[L_nL_m' - L_mL_n'] + \frac{1-x}{x}[L_nL_m' - L_mL_n'] \quad = \quad \frac{(n-m)L_mL_n}{x}$$

Multiplying by the integrating factor

$$e^{\int(1-x)/x\,dx} \quad = \quad e^{\ln x - x} \quad = \quad xe^{-x}$$

this can be written as

$$\frac{d}{dx}\{xe^{-x}[L_nL_m' - L_mL_n']\} \quad = \quad (n-m)e^{-x}L_mL_n$$

so that by integrating from 0 to $\infty$,

$$(n-m)\int_0^\infty e^{-x}L_m(x)\,L_n(x)\,dx \quad = \quad xe^{-x}[L_nL_m' - L_mL_n']\Big|_0^\infty \quad = \quad 0$$

Thus if $m \neq n$,

$$\int_0^\infty e^{-x}L_m(x)\,L_n(x)\,dx \quad = \quad 0$$

which proves the required result.

**8.10.** Prove that $L_{n+1}(x) = (2n+1-x)\,L_n(x) - n^2\,L_{n-1}(x)$.

The generating function for the Laguerre polynomials is

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} \quad = \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{L_n(x)}{n!}t^n \tag{1}$$

Differentiating both sides with respect to $t$ yields

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^2} - \frac{xe^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^3} \quad = \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{nL_n(x)}{n!}t^{n-1} \tag{2}$$

Multiplying both sides by $(1-t)^2$ and using $(1)$ on the left side we find

$$\sum_{n=0}^\infty (1-t)\frac{L_n(x)}{n!}t^n - \sum_{n=0}^\infty \frac{xL_n(x)}{n!}t^n \quad = \quad \sum_{n=0}^\infty (1-t)^2\frac{nL_n(x)}{n!}t^{n-1}$$

which can be written as

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{L_n(x)}{n!}t^n - \sum_{n=0}^\infty \frac{L_n(x)}{n!}t^{n+1} - \sum_{n=0}^\infty \frac{xL_n(x)}{n!}t^n$$

$$= \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{nL_n(x)}{n!}t^{n-1} - \sum_{n=0}^\infty \frac{2nL_n(x)}{n!}t^n + \sum_{n=0}^\infty \frac{nL_n(x)}{n!}t^{n+1}$$

If we now equate coefficients of $t^n$ on both sides of this equation we find

$$\frac{L_n(x)}{n!} - \frac{L_{n-1}(x)}{(n-1)!} - \frac{xL_n(x)}{n!} \quad = \quad \frac{(n+1)L_{n+1}(x)}{(n+1)!} - \frac{2nL_n(x)}{n!} + \frac{(n-1)L_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

Multiplying by $n!$ and simplifying we then obtain, as required,

$$L_{n+1}(x) \quad = \quad (2n+1-x)\,L_n(x) - n^2L_{n-1}(x)$$

**8.11.** Expand $x^3 + x^2 - 3x + 2$ in a series of Laguerre polynomials, i.e. $\sum_{k=0}^\infty A_kL_k(x)$.

We shall use a method similar to Method 1 of Problem 8.6($b$). Since we must expand a polynomial of degree 3 we need only take terms up to $L_3(x)$. Thus

$$x^3 + x^2 - 3x + 2 \;=\; A_0L_0(x) + A_1L_1(x) + A_2L_2(x) + A_3L_3(x)$$

Using the results of Problem 8.8 this can be written

$$x^3 + x^2 - 3x + 2 \;=\; (A_0 + A_1 + 2A_2 + 6A_3) - (A_1 + 4A_2 + 18A_3)x + (A_2 + 9A_3)x^2 - A_3x^3$$

Then, equating like powers of $x$ on both sides we have

$$A_0 + A_1 + 2A_2 + 6A_3 \;=\; 2, \quad A_1 + 4A_2 + 18A_3 \;=\; 3, \quad A_2 + 9A_3 \;=\; 1, \quad -A_3 \;=\; 1$$

Solving these we find

$$A_0 \;=\; 7, \quad A_1 \;=\; -19, \quad A_2 \;=\; 10, \quad A_3 \;=\; -1$$

Then the required expansion is

$$x^3 + x^2 - 3x + 2 \;=\; 7L_0(x) - 19L_1(x) + 10L_2(x) - L_3(x)$$

We can also work the problem by using $(19)$ and $(20)$, page 156.

**الحـــل**

باعتبـــار u دالة الجهد نرى من تماثل توزيع الشحنة حول محـور z أن $u = u(r,\varphi)$، وهي تحقق معادلة لابلاس داخل الكرة وخارجها. كما أن

$$u(1,\varphi) = f(\varphi) = \begin{cases} 10 & , \quad 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 & , \quad \pi/2 < \varphi \le \pi \end{cases}$$

فنحصل من (4.39) على

$$a_n = \frac{2n+1}{2} 10 \int_0^{\pi/2} P_n(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi$$
$$= 5(2n+1) \int_0^1 P_n(\xi) d\xi$$

وباستخدام الصيغة (4.9) نجد أن

$$a_n = \frac{5(2n+1)}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k+1)!}$$
$$a_0 = 5 \ , \ a_1 = \frac{15}{2} \ , \ a_2 = 0 \ , \ a_3 = -\frac{-35}{8} \ , \ \dots$$
$$\Rightarrow u(r,\varphi) = 5 + \frac{15}{2} r P_1(\cos\varphi) - \frac{35}{8} r^3 P_3(\cos\varphi) + \cdots, \quad r < 1$$

## تمارين (4.4)

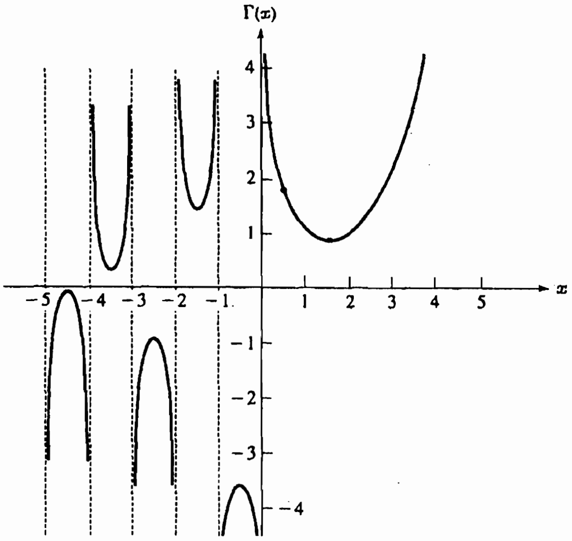
(1) في المثال (4.2) أوجد $u(r,\varphi)$ خارج الكرة $r \le 1$.

(2) أوجد معادلـة السطح الذي تكـون عليه الدالة $u_n(r,\varphi) = r^n P_n(\cos\varphi)$ صفرًا، حيث $n = 1,2,3$.

(3) ارسم الدوال $P_1(\cos\varphi)$ و $P_2(\cos\varphi)$.

(4) أوجد الحل $u(r,\varphi)$ لمعادلة لابلاس في داخل الكرة التي نصف قطرها R إذا كان

$$u(R,\varphi) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ -1 & , \quad \pi/2 < \varphi \le \pi \end{cases}$$



شكل (5.1)

## تمارين (5.1)

(1) أثبت أن دالة قاما المعرفة بالقاعدة (5.1) متصلة على $(0,\infty)$.

(2) أثبت أن $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ .

(3) أثبت أن

$$\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{n!4^{n}} \qquad \forall n\in\mathbb{N}_0$$

واستنتج الصيغة المناظرة عندما تكون n عددًا سالبًا.

(4) تعرف **دالة بيتا** (beta function) بأنها

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad , \quad x>0, y>0$$

(i) استخدم التحويل $u=\frac{t}{1-t}$ للحصول على

$$\beta(x,y)=\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du$$

(ii) أثبت أن

$$\Gamma(z) = s^z \int_0^\infty e^{-st} t^{z-1} dt$$

(iii) بوضع $s = 1 + u$ ، $z = x + y$ استنتج أن

$$\frac{1}{(1+u)^{x+y}} = \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty e^{-(1+u)t} t^{x+y-1} dt$$

ثم استخدم (i) للحصول على العلاقة

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

(5) أثبت أن $\beta(x,x) = 2^{1-2x}\beta(x,\tfrac{1}{2})$

(6) أثبت أن $2^{2x}\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\Gamma(2x)} = 2\pi$

(7) تعرَّف **دالة الخطأ** (error function) على $\mathbb{R}$ بالتكامل

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

أثبت الخواص التالية لهذه الدالة

(i) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \mathrm{erf}(x) = \pm 1$

(ii) $\mathrm{erf}(-x) = -\mathrm{erf}(x)$ وارسم الدالة $\mathrm{erf}(x)$

(iii) erf دالة تحليلية على $\mathbb{R}$ (أوجد منشور تيلور حول $x = 0$).

## (5.2) دوال بيسل من النوع الأول

تعتبر **معادلة بيسل**

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \tag{5.3}$$

حيث $v \ge 0$ ، من أهم المعادلات التفاضلية ذات الدلالة الفيزيائية ، ونظرا لأن $x = 0$ نقطة شاذة للمعادلة فإنه لا يجوز تمثيل الحل بمتسلسلة قوى حول هذه النقطة. وسنلجأ بدلا عن ذلك إلى ما يسمى **بطريقة فروبينيوس**، نسبة إلى الرياضي الألماني

① من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، التكامل $I_n = \int_0^n e^{-t} t^{x-1}\,dt$ دالة مستمرة لـ $x \in [a,b]$ حيث $0 < a < b < \infty$،

لكن:

$$0 \le \int_n^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt \le \int_n^\infty e^{-t} t^{b-1}\,dt \xrightarrow{n} 0,$$

فإن $I_n$ تتقارب بانتظام إلى $\Gamma(x)$.

وبذلك $\Gamma(x)$ مستمرة على $[a,b]$ لأي $0 < a < b < \infty$

وهكذا على $(0,\infty)$.

بإجراء مماثل نستطيع إثبات أن المشتقات:

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \log t\,dt,$$

$$\Gamma''(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\log t)^2\,dt$$

, ...

كلها مستمرة على $(0,\infty)$.

③

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = (n-\tfrac{1}{2}) \cdots \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,2^{2n}} \Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,4^n} \sqrt{\pi}$$

(بتمرين ②)

⑥ السؤال الطرف الأيمن $2\sqrt{\pi}$ (السؤال فيه خطأ)

استخدم تعريف التكامل لدالة جاما لنحصل على:

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\tfrac{1}{2}) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2x-1} (\alpha+\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

ومن ثم غيّر متغيرات التكامل إلى:

$\xi = \alpha^2 + \beta^2$ ، $\eta = 2\alpha\beta$

لنصل إلى الصيغة المطلوبة.

One of the most interesting formulas for $\pi$ is a multiplicative one due to Wallis (1665):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\,\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\,\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\,\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdots = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}. \tag{1}$$

Common proofs use the infinite product expansion for $\sin x$ (see [18, p. 142]) or induction to prove formulas for integrals of powers of $\sin x$ (see [3, p. 115]). We present a mostly elementary proof using standard facts about probability distributions encountered in a first course on probability or statistics (and hence the title).[2] The reason we must write "mostly elementary" is that at one point we appeal to the Dominated Convergence Theorem. It is possible to bypass this and argue directly, and we sketch the main ideas for the interested reader.

Recall that a continuous function $f(x)$ is a continuous probability distribution if (1) $f(x) \geq 0$ and (2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. We immediately see that if $g(x)$ is a nonnegative continuous function whose integral is finite then there exists an $a > 0$ such that $ag(x)$ is a continuous probability distribution (take $a = 1/\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$). This simple observation is a key ingredient in our proof, and is an extremely important technique in mathematics; the proof of Wallis's formula is but one of many applications.[3] In fact, this observation greatly simplifies numerous calculations in random matrix theory, which has successfully modeled diverse systems ranging from energy levels of heavy nuclei to the prime numbers; see [5, 14] for introductions to random matrix theory and [11] for applications of this technique to the subject. One of the purposes of this paper is to introduce students to the consequences of this simple observation.

Our proof relies on two standard functions from probability, the Gamma function and the Student $t$-distribution. The Gamma function $\Gamma(x)$ is defined by

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Note that this integral is well defined if the real part of $x$ is positive. Integrating by parts yields $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. This implies that if $n$ is a nonnegative integer then $\Gamma(n+1) = n!$; thus the Gamma function generalizes the factorial function (see [17] for more on the Gamma function, including another proof of Wallis's formula involving the Gamma function). We need the following:

**Claim:** $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

2/3

---

[2] For a statistical proof involving an experiment and data, see the chapter on Buffon's needle in [1] (page 133): if you have infinitely many parallel lines $d$ units apart, then the probability that a "randomly" dropped rod of length $\ell \leq d$ crosses one of the lines is $2\ell/\pi d$. Thus you can calculate $\pi$ by throwing many rods on the grid and counting the number of intersections.

[3] A nice application of Wallis's formula is in determining the universal constant in Stirling's formula for $n!$; see [15] for some history and applications.

*Proof.* In the integral for $\Gamma(1/2)$, change variables by setting $u = \sqrt{t}$ (so $dt = 2udu = 2\sqrt{t}du$). This yields

$$\Gamma(1/2) \;=\; 2\int_0^\infty e^{-u^2}du \;=\; \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du.$$

This integral is well-known to equal $\sqrt{\pi}$ (see page 542 of [2]). The standard proof is to square the integral and convert to polar coordinates:

$$\Gamma(1/2)^2 \;=\; \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du\int_{-\infty}^\infty e^{-v^2}dv \;=\; \int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-r^2}rdrd\theta \;=\; \pi.$$

□

In fact, our proof above shows

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt \;=\; 1. \tag{2}$$

This density is called the standard normal (or Gaussian). This is one of the most important probability distributions, and we shall see it again when we look at the Student $t$-distribution. If $g$ is a continuous probability density, then we say that the random variable $Y$ has distribution $g$ if for any interval $[a, b]$ the probability that $Y$ takes on a value in $[a, b]$ is $\int_a^b g(y)dy$. The celebrated Central Limit Theorem (see [6, p. 515] for a proof) states that for many continuous densities $g$, if $X_1, \dots, X_n$ are independent random variables, each with density $g$, then as $n \to \infty$ the distribution of $(Y_n - \mu)/\sigma$ converges to the standard normal (where $Y_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ is the sample average, $\mu$ is the mean of $g$, and $\sigma$ is its standard deviation[4]).

The second function we need is the Student[5] $t$-distribution (with $\nu$ degrees of freedom):

$$f_\nu(t) \;=\; \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \;=\; c_\nu\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}};$$

here $\nu$ is a positive integer and $t$ is any real number.

**Claim: The Student $t$-distribution is a continuous probability density.**

*Proof.* As $f_\nu(t)$ is clearly continuous and nonnegative, to show $f_\nu(t)$ is a probability density it suffices to show that it integrates to 1. We must therefore show that

$$\int_{-\infty}^\infty \left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}dt \;=\; \frac{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}.$$

---

[4] The mean $\mu$ of a distribution is its average value: $\mu = \int xg(x)dx$. The standard deviation $\sigma$ measures how spread out a distribution is about its average value: $\sigma^2 = \int(x-\mu)^2g(x)dx$.

[5] Student was the pen name of William Gosset.

$$= c\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)(m+1)!}\left(\frac{c}{2}\right)^{2m+1}$$

$$= cJ_1(c)$$

حيث استندنا في إجراء عملية التكامل على حدود المتسلسلة إلى أن متسلسلة القوى متقاربة بانتظام على أي فترة محدودة.

## تمارين (5.2)

(1) تحقق من تقارب متسلسلة القوى التي تمثل $x^{-\nu}J_\nu(x)$ على **R** لكل $\nu \geq 0$.

(2) تحقق من أن $J_n(x)$ قابلة للتمديد إلى دالة زوجية على **R** إذا كان n عددا زوجيا، وإلى دالة فردية إذا كان n فرديا.

(3) أثبت أن

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad , \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

(4) أثبت أن $xJ'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x)$

واستخلص من ذلك نتيجة المثال (5.1).

(5) استخدم نتيجة التمرينين (3) و (4) للحصول على

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

(6) أثبت أن

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

واستخلص من ذلك أن

$$J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x}{x} + \sin x\right)$$

(7) استخدم نتيجة المثال (5.2) والتمرين (6) للحصول على

$$J'_\nu(x)=\frac{1}{2}[J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)]$$

(8) أثبت أن

$$J_{\nu+1}(x)+J_{\nu-1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$$

(9) أثبت أن

$$\text{(i)}\quad \int_0^x t^2J_1(t)dt=2xJ_1(x)-x^2J_0(x)$$

$$\text{(ii)}\quad \int_0^x J_3(t)dt=1-J_2(x)-\frac{2}{x}J_1(x)$$

(10) استخدم العلاقتين $(xJ_1)'=xJ_0$ و $J'_0=-J_1$ لإثبات المساواة

$$\int_0^x t^nJ_0(t)dt=x^nJ_1(x)+(n-1)x^{n-1}J_0(x)-(n-1)^2\int_0^x t^{n-2}J_0(t)dt$$

(11) أثبت أن دالة الرونسكيان $W=W(J_\nu,J_{-\nu})$ ، حيث $\nu\notin\mathbb{N}_0$ ، تحقق المعادلة $W'=-W/x$ ثم أوجد صيغة $W(x)$.

## (5.3) دوال بيسل من النوع الثاني

بالنظر إلى النتيجة (5.1.1) فإن من الطبيعي أن نتساءل عن صيغة الحل العام لمعادلة ليسل عندما يكون $\nu$ عددًا صحيحًا، أي ما هي الدالة المستقلة عن $J_n$ ، حيث $n\in\mathbb{N}_0$ ، التي تحقق معادلة بيسل؟ هناك أكثر من طريقة للحصول على حل آخر، مشتقل عن $J_n$ ، لمعادلة بيسل (راجع التمرين 5.3.1)، وسنعتمد هنا الأسلوب الأكثر شيوعا.

لنعرف الدالة

$$Y_\nu(x)=\frac{1}{\sin\nu\pi}[J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)]\quad,\quad \nu\neq 0,1,2,\ldots \tag{5.15}$$

$$Y_n(x)=\lim_{\nu\to n}Y_\nu(x)\quad,\quad n=0,1,2,\ldots$$

① استخدم اختبار ~~[illegible]~~ النسبة

④ استخدم المعادلة (5.11) واضرب بـ x

⑦ عوض بـ $v=-\frac{1}{2}$ في المساواة واستخدم تمرين ③

9 (i) : من ش $\overline{6}$ :

$$\int_0^x \frac{d}{dt}\left[t^2 J_2(t)\right] dt = \int_0^x t^2 J_1(t)\, dt \qquad (v=2)$$

$$x^2 J_2(x) = \int_0^x t^2 J_1(t)\, dt$$

ومن ش $\overline{8}$ $(v=1)$

$$x^2\left[\frac{2\cdot 1}{x} J_1 - J_0\right] = \int_0^x t^2 J_1(t)\, dt$$

$$2x J_1(x) - x^2 J_0(x) = \int_0^x t^2 J_1(t)\, dt$$

Equation (7.23) becomes

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-n^2)y=0 \tag{7.24}$$

Since (7.24) is a Bessel differential equation

$$y(t)=AJ_n(t)+BY_n(t)$$

is a solution. The original equation (7.23) has the solution

$$y(x)=AJ_n(\lambda x)+BY_n(\lambda x) \tag{7.25}$$

Equation (7.23) is referred to as a *Bessel differential of order n with a parameter* λ. This equation and its solution (7.25) have special significance when we discuss orthogonality properties of Bessel functions. For more details of the reduction to Bessel's equation see Brand [5, pp. 495–496].

## 7.5. SPECIAL BESSEL FUNCTIONS AND IDENTITIES

We have shown the form of a few Bessel functions and examined some identities while discussing dependency. By a set of examples and problems we wish to expand our capability for using Bessel functions.

3 **Example 7.3.** Show that

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

Substituting $n=1/2$ in (7.7a), one finds that

$$J_{1/2}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1/2}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}-\frac{1}{1!\Gamma(\frac{5}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{5/2}+\frac{1}{2!\Gamma(\frac{7}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{9/2}-+\cdots$$

$$=\frac{1}{(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}-\frac{1}{1!(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{5/2}$$

$$+\frac{1}{2!(\frac{5}{2})(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{9/2}-+\cdots$$

$$=\frac{(x/2)^{1/2}}{(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\cdots\right)$$

$$= \left(\frac{4}{2\pi x}\right)^{1/2} \sin x$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

**Example 7.4.** Establish that

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x) \tag{7.26}$$

Using termwise differentiation of the series for $x^n J_n(x)$, we obtain

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2n+2k}}{2^{n+2k} k!\Gamma(n+k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(n+k) x^{2n+2k-1}}{2^{n+2k} k!(n+k)\Gamma(n+k)}$$

$$= x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{(n-1)+2k}}{2^{(n-1)+2k} k!\Gamma((n-1)+k+1)}$$

$$= x^n J_{n-1}(x)$$

6

**Example 7.5.** Show that

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \tag{7.27}$$

The procedure is similar to the process used in Example 7.4.

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{n+2k} k!\Gamma(n+k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k) x^{2k-1}}{2^{n+2k} k!\Gamma(n+k+1)}$$

$$= -x^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+(n+1)}}{2^{2m+(n+1)} m!\Gamma((n+1)+m+1)}, \qquad k = m+1$$

$$= -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

7

**Example 7.6.** Find $J_n'(x)$ in terms of $J_{n-1}(x)$ and $J_{n+1}(x)$.

From (7.26) and (7.27),

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_n'(x) + n x^{n-1} J_n(x) = x^n J_{n-1}(x) \tag{7.28}$$

and

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right]=x^{-n}J_n'(x)-nx^{-(n+1)}J_n(x)=-x^{-n}J_{n+1}(x) \qquad (7.29)$$

In (7.28) we find that

$$J_n'(x)=J_{n-1}(x)-\frac{n}{x}J_n(x) \qquad (7.30)$$

and from (7.29)

$$J_n'(x)=-J_{n+1}(x)+\frac{n}{x}J_n(x) \qquad (7.31)$$

adding (7.30) and (7.31), we find that

$$2J_n'(x)=J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)$$

or

$$J_n'(x)=\frac{J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)}{2} \qquad (7.32)$$

8/5 **Example 7.7.** Find an identity involving $J_{n-1}(x)$, $J_n(x)$ and $J_{n+1}(x)$.
If one subtracts (7.31) from (7.30), derivative terms vanish and

$$J_{n+1}(x)+J_{n-1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x) \qquad (7.33)$$

(i) 9/5 **Example 7.8.** Determine $\int x^n J_{n-1}(x)\,dx$.
From (7.26)

$$\int x^n J_{n-1}(x)\,dx=x^n J_n(x)+C \qquad (7.34)$$

**Example 7.9.** Find $\int_0^2 x^4 J_3(x)\,dx$.
Employing (7.34),

$$\int_0^2 x^4 J_3(x)\,dx=\left[x^4 J_4(x)\right]_0^2=2^4 J_4(2).$$

**Example 7.10.** Show that if $n$ is not an integer

$$\frac{d}{dx}\left[x^n Y_n(x)\right]=x^n Y_{n-1}(x) \qquad (7.35)$$

In the theory of second order linear differential equations of the form

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0,$$

two solutions $y_1$ and $y_2$ are linearly independent if and only if

$$W(y_1, y_2)(z) := \begin{vmatrix} y_1(z) & y_2(z) \\ y_1'(z) & y_2'(z) \end{vmatrix} = y_1(z)y_2'(z) - y_1'(z)y_2(z) \neq 0.$$

This determinant is called the Wronskian of the solutions $y_1$ and $y_2$.
It can (easily) be shown that this determinant of Wronski satisfies the differential equation

$$W'(z) + p(z)W(z) = 0.$$

This result is called Abel's theorem or the theorem of Abel-Liouville. In the case of the Bessel differential equation we have $p(z) = 1/z$, which implies that

$$W'(z) + \frac{1}{z}W(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad W(y_1, y_2)(z) = \frac{c}{z}$$

for some constant $c$. Now we have

11

5

**Theorem 1.**

$$W(J_\nu, J_{-\nu})(z) = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z} \quad \textit{and} \quad W(J_\nu, Y_\nu)(z) = \frac{2}{\pi z}. \tag{4}$$

For $\nu \geq 0$ this implies that $J_\nu(z)$ and $J_{-\nu}(z)$ are linearly independent if $\nu \notin \{0, 1, 2, \ldots\}$ and that $J_\nu(z)$ and $Y_\nu(z)$ are linearly independent for all $\nu \geq 0$.

*Proof.* Note that

$$\begin{aligned} W(J_\nu, Y_\nu)(z) &= J_\nu(z)Y_\nu'(z) - J_\nu'(z)Y_\nu(z) \\ &= J_\nu(z)\frac{J_\nu'(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}'(z)}{\sin\nu\pi} - J_\nu'(z)\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \\ &= -\frac{J_\nu(z)J_{-\nu}'(z) - J_\nu'(z)J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} = -\frac{W(J_\nu, J_{-\nu})(z)}{\sin\nu\pi}. \end{aligned}$$

Now we use the definition (1) to obtain

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu + k + 1)\, k!} \cdot \frac{z^{\nu+2k}}{2^{\nu+2k}} \quad \Longrightarrow \quad J_\nu'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\nu + 2k)}{\Gamma(\nu + k + 1)\, k!} \cdot \frac{z^{\nu+2k-1}}{2^{\nu+2k}}$$

and

$$J_{-\nu}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(-\nu + m + 1)\, m!} \cdot \frac{z^{-\nu+2m}}{2^{-\nu+2m}}$$

$$\Longrightarrow \quad J_{-\nu}'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(-\nu + 2m)}{\Gamma(-\nu + m + 1)\, m!} \cdot \frac{z^{-\nu+2m-1}}{2^{-\nu+2m}}.$$

Hence we have

$$\begin{aligned} z\,W(J_\nu, J_{-\nu})(z) &= z\left[J_\nu(z)J'_{-\nu}(z) - J'_\nu(z)J_{-\nu}(z)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}(-\nu+2m)}{\Gamma(\nu+k+1)\Gamma(-\nu+m+1)\,k!\,m!}\cdot\frac{z^{2k+2m}}{2^{2k+2m}} \\ &\qquad - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}(\nu+2k)}{\Gamma(\nu+k+1)\Gamma(-\nu+m+1)\,k!\,m!}\cdot\frac{z^{2k+2m}}{2^{2k+2m}} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}(2\nu+2k-2m)}{\Gamma(\nu+k+1)\Gamma(-\nu+m+1)\,k!\,m!}\cdot\frac{z^{2k+2m}}{2^{2k+2m}}. \end{aligned}$$

This implies that

$$\lim_{z\to 0} z\,W(J_\nu, J_{-\nu})(z) = -\frac{2\nu}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} = -\frac{2\nu}{\nu\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}.$$

Using the definition (1) we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\left[z^\nu J_\nu(z)\right] &= \frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu+k+1)\,k!}\cdot\frac{z^{2\nu+2k}}{2^{\nu+2k}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2\nu+2k)}{\Gamma(\nu+k+1)\,k!}\cdot\frac{z^{2\nu+2k-1}}{2^{\nu+2k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu+k)\,k!}\cdot\frac{z^{2\nu+2k-1}}{2^{\nu+2k-1}} = z^\nu J_{\nu-1}(z). \end{aligned}$$

Hence we have

$$\frac{d}{dz}\left[z^\nu J_\nu(z)\right] = z^\nu J_{\nu-1}(z) \quad\Longleftrightarrow\quad zJ'_\nu(z) + \nu J_\nu(z) = zJ_{\nu-1}(z). \tag{5}$$

Similarly we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\left[z^{-\nu} J_\nu(z)\right] &= \frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu+k+1)\,k!}\cdot\frac{z^{2k}}{2^{\nu+2k}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2k}{\Gamma(\nu+k+1)\,k!}\cdot\frac{z^{2k-1}}{2^{\nu+2k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(\nu+k+2)\,k!}\cdot\frac{z^{2k+1}}{2^{\nu+2k+1}} = -z^{-\nu}J_{\nu+1}(z). \end{aligned}$$

Hence we have

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-\nu} J_\nu(z)\right] = -z^{-\nu}J_{\nu+1}(z) \quad\Longleftrightarrow\quad zJ'_\nu(z) - \nu J_\nu(z) = -zJ_{\nu+1}(z). \tag{6}$$

Elimination of $J'_\nu(z)$ from (5) and (6) gives

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}J_\nu(z)$$

and elimination of $J_\nu(z)$ from (5) and (6) gives

$$J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_\nu(z).$$

## Special cases

3/5 ← For $\nu = 1/2$ we have from the definition (1) by using Legendre's duplication formula for the gamma function

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+3/2)\,k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x, \quad x > 0$$

3/5 ← and for $\nu = -1/2$ we have

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1/2)\,k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x, \quad x > 0.$$

Note that the definition (3) implies that

$$Y_{1/2}(x) = -J_{-1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x \quad \text{and} \quad Y_{-1/2}(x) = J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x, \quad x > 0.$$

## Integral representations

First we will prove

**Theorem 2.**

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \int_{-1}^{1} e^{izt}(1-t^2)^{\nu-1/2}\,dt, \quad \operatorname{Re}\nu > -1/2. \tag{7}$$

*Proof.* We start with

$$\int_{-1}^{1} e^{izt}(1-t^2)^{\nu-1/2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \int_{-1}^{1} t^n(1-t^2)^{\nu-1/2}\,dt.$$

Note that the latter integral vanishes when $n$ is odd. For $n = 2k$ we obtain using $t^2 = u$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} t^{2k}(1-t^2)^{\nu-1/2}\,dt &= 2\int_0^1 u^k(1-u)^{\nu-1/2}\,\frac{du}{2\sqrt{u}} = \int_0^1 u^{k-1/2}(1-u)^{\nu-1/2}\,du \\ &= B(k+1/2, \nu+1/2) = \frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+k+1)}. \end{aligned}$$

Now we use Legendre's duplication formula to find that

$$\Gamma(k+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}} \cdot \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(k)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k}} \cdot \frac{\Gamma(2k+1)}{\Gamma(k+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k}} \cdot \frac{(2k)!}{k!}.$$

Hence we have

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} e^{izt}(1-t^2)^{\nu-1/2}\,dt &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+k+1)} \\ &= \Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu+k+1)\,k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}. \end{aligned}$$

This proves the theorem.

## تمارين (5.3)

(1) افرض أن $y(x) = u(x)J_n(x)$ وعوض في معادلة بيسل (5.3) للحصول على حل آخر

$$J_n(x)\int_c^x \frac{1}{tJ_n{}^2(t)}$$

لمعادلة بيسل مستقل عن $J_n(x)$.

(2) تحقق من صحة السلوك التقاربي (5.16) و (5.17) للدالتين $Y_0$ و $Y_1$ في جوار $x = 0$.

(3) عين السلوك التقاربي للدوال $J_n$ و $Y_n$ ، لكل $n\in\mathbb{N}$، في جوار $x = 0$.

(4) أثبت أن

$$\frac{d}{dx}[x^\nu Y_\nu(x)] = x^\nu Y_{\nu-1}(x)$$

(5) أثبت أن

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu} Y_\nu(x)] = -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x)$$

واستنتج من ذلك أن أصفار الدالة $Y_n$ في $(0,\infty)$ متتالية غير منتهية ومتزايدة إلى $\infty$.

(6) تعرف الدالة $I_\nu$ بالقاعدة

$$I_\nu(x) = i^{-\nu}J(ix) \quad , \nu\geq 0$$

حيث $i = \sqrt{-1}$ . أثبت أن $I_\nu$ تحقق المعادلة

$$x^2y'' + xy' - (x^2+\nu^2)y = 0 \qquad (5.19)$$

(7) استنتج من تعريف $I_\nu$ في التمرين (6) أن $I_\nu$ دالة حقيقية ممثلة بالمتسلسلة

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2m+\nu}$$

(8) أثبت أن $I_\nu(x) \neq 0$ لكل $x > 0$ وأن $I_{-n}(x) = I_n(x)$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(9) أثبت أن الدالة

$$K_v(x) = \frac{\pi}{2\sin v\pi}[I_{-v}(x) - I_v(x)]$$

أيضا تحقق المعادلة (5.19).

**ملحوظة**: تسمى $I_v$ و$K_v$ **دوال بيسل المحوَّرة** (modified Bessel functions) من النوع الأول والثاني، على الترتيب، ذوات الرتبة v.

## (5.4) بعض الصيغ التكاملية للدالة $J_n$

سنثبت أولا أن الدالة المولِّدة لدالة بيسل $J_v$ هي

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)z^n \quad \forall z \neq 0 \qquad (5.20)$$

وذلك بملاحظة أن

$$e^{xz/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}(\frac{x}{2})^j$$

$$e^{x/2z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!z^k}(\frac{x}{2})^k$$

وأن هاتين المتسلسلتين متقاربتان مطلقا، مما يسمح لنا بكتابة

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{j!k!}(\frac{x}{2})^{j+k} z^{j-k}$$

وبالتعويض $j - k = n$، مع مراعاة أن $\frac{1}{(k+n)!} = \frac{1}{\Gamma(k+n+1)} = 0$ عندما $k + n < 0$، نجد أن

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}(\frac{x}{2})^{2k+n}\right]z^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)z^n$$

(١) عوض مباشرة في معادلة بيسل. لاحظ أنه بينما $J_n(x)$ محدودة عند $x=0$ فإن $Y_n(x)$ ليست كذلك. وهكذا فإن الدالتين لا يمكن أن تكونا مرتبطتان خطياً.

(٩) تعريف $I_\nu$ (كما هو معطى في تمرين (٦)) سيمتد إلى القيم السالبة لـ $\nu$ معادلة (5.19) لا تتغير تحت تغير إشارة $\nu$ وهكذا فإنها محققة بالدالتين $I_\nu$ و $I_{-\nu}$ سوياً.

$_{+1}(x)$ (7.29)

(7.30)

(7.31)

(7.32)

$_{n+1}(x)$.
ınd

(7.33)

(7.34)

(7.35)

---

4 ✓
5

According to the definition of $Y_n(x)$ and (7.26) and (7.27)

$$\frac{d}{dx}\left[x^nY_n(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[x^n\frac{J_n(x)\cos n\pi-J_{-n}(x)}{\sin n\pi}\right]$$

$$=x^n\left[\frac{J_{n-1}(x)\cos n\pi+J_{-n+1}(x)}{\sin n\pi}\right]$$

$$=x^n\left[\frac{J_{n-1}(x)(-\cos(n-1)\pi)+J_{-(n-1)}(x)}{-\sin(n-1)\pi}\right]$$

$$=x^n\left[\frac{J_{n-1}(x)\cos(n-1)\pi-J_{-(n-1)}(x)}{-\sin(n-1)\pi}\right]$$

$$=x^nY_{n-1}(x)$$

The result (7.35) may be established also when $n$ is an integer by using the limits in the definition.

## Exercises 7.1

1. Show that $J_0'(x)=-J_1(x)$.

2. Show that $xJ_n'(x)=nJ_n(x)-xJ_{n+1}(x)$. ✓

3. Show that

   (a) $J_1'(x)=\dfrac{xJ_0(x)-J_1(x)}{x}$.

   (b) $2J_2'(x)=J_1(x)-J_3(x)$.

4. Establish that

$$J_n'(x)=J_{n-1}(x)-\frac{n}{x}J_n(x)$$ ✓

5. Show that

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n}Y_n(x)\right]=-x^{-n}Y_{n+1}(x)$$ ✓

6. Demonstrate that

$$\int_0^1 J_1(x)\,dx=1-J_0(1)$$

## Hankel functions

The functions $H_\nu^{(1)}(z)$ and $H_\nu^{(2)}(z)$ are defined by

$$H_\nu^{(1)}(z) := J_\nu(z) + iY_\nu(z) \quad \text{and} \quad H_\nu^{(2)}(z) := J_\nu(z) - iY_\nu(z).$$

These functions are called Hankel functions or Bessel functions of the third kind.
Note that these definitions imply that

$$J_\nu(z) = \frac{H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)}{2} \quad \text{and} \quad Y_\nu(z) = \frac{H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)}{2i}.$$

Further we have

$$H_{-1/2}^{(1)}(x) = J_{-1/2}(x) + iY_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,(\cos x + i\sin x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{ix}, \quad x > 0$$

and

$$H_{-1/2}^{(2)}(x) = J_{-1/2}(x) - iY_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,(\cos x - i\sin x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-ix}, \quad x > 0.$$

Similarly we have

$$H_{1/2}^{(1)}(x) = J_{1/2}(x) + iY_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,(\sin x - i\cos x) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{ix}, \quad x > 0$$

and

$$H_{1/2}^{(2)}(x) = J_{1/2}(x) - iY_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,(\sin x + i\cos x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-ix}, \quad x > 0.$$

## Modified Bessel functions

7/3 ←

The modified Bessel function $I_\nu(z)$ of the first kind of order $\nu$ is defined by

$$I_\nu(z) := \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\,{}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ \nu+1 \end{matrix};\frac{z^2}{4}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)\,k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

For $\nu \geq 0$ this is a solution of the modified Bessel differential equation

$$z^2y''(z) + zy'(z) - \left(z^2 + \nu^2\right)y(z) = 0, \quad \nu \geq 0.$$

For $\nu \notin \{0, 1, 2, \ldots\}$ we have that $I_{-\nu}(z)$ is a second solution of this differential equation and the two solutions $I_\nu(z)$ and $I_{-\nu}(z)$ are linearly independent.
For $\nu = n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ we have $I_{-n}(z) = I_n(z)$.
The modified Bessel function $K_\nu(z)$ of the second kind of order $\nu$ is defined by

$$K_\nu(z) := \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\right] \quad \text{for} \quad \nu \notin \{0, 1, 2, \ldots\}$$

and

$$K_n(z) = \lim_{\nu\to n} K_\nu(z) \quad \text{for} \quad n \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Now we have for $x > 0$

$$I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sinh x, \quad I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cosh x \quad \text{and} \quad K_{1/2}(x) = K_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}.$$

يساوي الصفر إن كان n عددا فرديا ويساوي $2J_n(x)\cos nx$ إن كان n عددا زوجيا، فنحصل من (5.24) على

$$\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x)\cos 2mx \qquad (5.26)$$

وبالمثل فإن

$$\sin(x\sin\theta) = 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m-1}(x)\sin(2m-1)\theta \qquad (5.27)$$

وبالنظر إلى أن الطرف الأيمن في كل من (5.26) و (5.27) على صورة متسلسلة فورييه، الأول للدالة الزوجية $\cos(x\sin\theta)$ والثاني للدالة الفردية $\sin(x\sin\theta)$، فإن

$$J_{2m}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\cos 2m\theta d\theta \quad , \quad m\in\mathbb{N}_0 \qquad (5.28)$$

$$J_{2m-1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\theta)\sin(2m-1)\theta d\theta \quad , \quad m\in\mathbb{N} \qquad (5.29)$$

ومن هاتين المعادلتين نرى أن $J_0(0) = 1$ وأن $J_n(0) = 0$ لكل $n \geq 1$.

## تمارين (5.4)

(1) أثبت أن

$$\frac{d^k}{dx^k}J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^k\theta\cos(x\sin\theta - n\theta + \frac{k\pi}{2})d\theta \quad , \; n\in\mathbb{N}_0 \; , \; k\in\mathbb{N}$$

واستنتج من ذلك أن $|J_n^{(k)}(x)| \leq 1$ لكل $x \geq 0$.

(2) أثبت ما يلي:

$$\text{(i)} \quad J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x) = 1$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)J_{2m-1}(x) = \frac{x}{2}$$

(3) أثبت المتطابقة

$$J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(x) = 1$$

(4) استخدم المعادلتين (5.28) و(5.29) للحصول على

$$J_{2m}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta)\cos 2m\theta d\theta \quad , \quad m \in \mathbb{N}_0$$

$$J_{2m-1}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(x\sin\theta)\sin(2m-1)\theta d\theta \quad , \quad m \in \mathbb{N}$$

(5) أثبت أن

$$\int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta)\sin 2m\theta d\theta = 0 \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

(6) أثبت المتطابقات

(i) $\cos\theta = J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - \cdots$

(ii) $\sin x = 2J_1(x) - 2J_3(x) + 2J_5(x) - \cdots$

(iii) $1 = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \cdots$

(7) أثبت أن $\lim_{n\to\infty} J_n(x) = 0$ .

## (5.5) تعامد دوال بيسل

بعد القسمة على x، حيث $x > 0$، تتحول معادلة بيسل (5.3) إلى الصيغة القياسية لمعادلة شتورم - ليوفيل

$$xy'' + y' + (x - \frac{v^2}{x})y = 0 \tag{5.30}$$

حيث المؤثر التفاضلي

$$L = \frac{d}{dx}(x\frac{d}{dx}) - \frac{v^2}{x}$$

قرين لذاته شكلاً والدالة $w(x) = x$ تمثل دالة الثقل في المعادلة. إلا أن المقارنة مع الصيغة (2.32) تبين أن متغير القيمة الذاتية $\lambda$ لا يظهر بشكل صريح في المعادلة. ولكن بالتعويض

لا يكتب فـ
هذا الهامـ

(١) الاستنتاج:
تأتي من محدودية على sine و Cosine

(٣) نستخدم علاقة بارسيفال
وشرط أن $|J_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2}}, n\in \mathbb{N}$ و $|J_0(x)| \le 1$
نطبق علاقة بارسيفال على المعادلتين:
(5.26) و (5.23) لنتحصل على:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x\sin\theta)\,d\theta = 2\pi J_0^2(x) + 4\pi\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}^2(x)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x\sin\theta)\,d\theta = 4\pi\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m-1}^2(x)$$

بجمع المعادلتين الأخيرتين نحصل المساواة المطلوبة.

(٧) بتطبيق الملاحظة (2) و (3) صـ ٩٠ على المعادلتين
(5.28) و (5.29)

(١) نشتق العلاقة (5.22) K مرة فنحصل على العلاقة المطلوبة

(٢) نستفيد من الدالة المولدة لدالة بيسل $I_\nu$

(٥) استخدم المتطابقتين (5.26) و (5.27).

Exercise 7.2

2. Verify (7.44). → حل آخر لـ

(7.44). $J_n^{(m)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^m\alpha \cos\left(n\alpha - x\sin\alpha + \frac{m\pi}{2}\right) d\alpha = P(m)$

by Mathematical induction:

$\boxed{1}$ for $m=1$, it is true since by Exercise 1, above we have:

$$J_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\alpha \sin(n\alpha - x\sin\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\alpha \cos\left(n\alpha - x\sin\alpha + \frac{\pi}{2}\right) d\alpha$$

$\boxed{2}$ suppose that $P(k)$ is true, i.e.

$$J_n^{(k)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^k\alpha \cos\left(n\alpha - x\sin\alpha + \frac{k\pi}{2}\right) d\alpha$$

③ To prove $P(k+1)$

$$J_n^{(k+1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (-\sin^{k}\alpha)\left(-\sin\left(n\alpha - x\sin\alpha + \frac{k\pi}{2}\right)\right) d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^{k+1}\alpha \cdot \sin\left(n\alpha - x\sin\alpha + \frac{k\pi}{2}\right) d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -\sin^{k+1}\alpha \cos\left(n\alpha - x\sin\alpha + \frac{(k-1)\pi}{2}\right) d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^{k+1}\alpha \cos\left(n\alpha - x\sin\alpha + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) d\alpha \qquad \because \cos\theta = -\cos(\theta+\pi)$$

في تمارين ٨-٢

7. Find the Coefficients so that:

$$x^2 = B_0 P_0(x) + B_1 P_1(x) + B_2 P_2(x) + B_3 P_3(x) + \cdots$$

$$x^2 = B_0(1) + B_1(x) + B_2\left(\frac{3x^2-1}{2}\right) + B_3\left(\frac{5x^3-3x}{2}\right) + \cdots$$

put $\boxed{B_1 = 0}$, $\frac{3}{2}B_2 = 1 \Rightarrow \boxed{B_2 = \frac{2}{3}}$

also, $B_0 - \frac{1}{2}B_2 = 0 \longrightarrow B_0 - \frac{1}{3} = 0 \longrightarrow \boxed{B_0 = \frac{1}{2}}$.

and $\boxed{B_n = 0}$ $\forall n \geq 3$ $\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$.

## A generating function

The Bessel function $J_n(z)$ of the first kind of integer order $n \in \mathbb{Z}$ can also be defined by means of the generating function

$$\exp\left(\frac{1}{2}z\left(t-t^{-1}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n. \tag{8}$$

In fact, the series on the right-hand side is a so-called Laurent series at $t=0$ for the function at the left-hand side. Using the Taylor series for the exponential function we obtain

$$\exp\left(\frac{1}{2}z\left(t-t^{-1}\right)\right) = \exp\left(\frac{zt}{2}\right)\cdot\exp\left(-\frac{z}{2t}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{zt}{2}\right)^j\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2t}\right)^k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n.$$

For $n \in \{0,1,2,\ldots\}$ we have

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+k}\cdot\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^k = \left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(n+k)!\,k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = J_n(z)$$

and

$$a_{-n} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{z}{2}\right)^j\cdot\frac{(-1)^{j+n}}{(n+j)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+j} = (-1)^n J_n(z) = J_{-n}(z).$$

This proves (8).

If $t = e^{i\theta}$, then we have

$$\frac{1}{2}\left(t-t^{-1}\right) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} = i\sin\theta$$

$$\Longrightarrow \quad \exp\left(\frac{1}{2}x\left(t-t^{-1}\right)\right) = e^{ix\sin\theta} = \cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta).$$

Hence we have

$$\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta) = e^{ix\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\left[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right].$$

Since $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ this implies that

$$\cos(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos(n\theta) = J_0(x)+2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)\cos(2k\theta)$$

and

$$\sin(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\sin(n\theta) = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(x)\sin(2k+1)\theta.$$

6(i)+(ii) For $\theta = \pi/2$ this implies that

$$\cos x = J_0(x)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(x) \quad \text{and} \quad \sin x = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}(x).$$

6(iii) For $\theta = 0$ we also have

$$1 = J_0(x)+2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x).$$

$$\langle f(x),J_0(\alpha_k x)\rangle = \int_0^2 J_0(\alpha_k x)xdx$$
$$= \frac{1}{\alpha_k^2}\int_0^{2\alpha_k} J_0(y)ydy$$
$$= \frac{2}{\alpha_k}J_1(2\alpha_k)$$

حيث استفدنا من نتيجة المثال (5.3) في تقويم التكامل. ثم نرى من (5.38) أن

$$||J_0(\alpha_k x)||^2 = 8J_1^2(4\alpha_k)$$

وأخيرًا نحصل من (5.36) على المنشور المطلوب

$$f(x) \doteq \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(2\alpha_k)}{\alpha_k J_1^2(4\alpha_k)}J_0(\alpha_k x)$$

لاحظ أن قيمة المتسلسلة عند $x = 2$ تساوي

$$\frac{1}{2}[f(2^+)+f(2^-)] = \frac{1}{2}$$

أي أن

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(2\alpha_k)J_0(2\alpha_k)}{\alpha_k J_1^2(4\alpha_k)} = 2$$

حيث $\{4\alpha_k : k\in\mathbb{N}\}$ هي أصفار الدالة $J_0$.

## تمارين (5.5)

أوجد منشور بيسل من النـــوع $\sum c_k J_0(\alpha_k x)$ ، حيث $\alpha_k$ هي حلول $J_0(\alpha b) = 0$ الموجبة ، للدالة f المعرفة على $[0,b]$ في التمارين من (1) إلى (5) :

(1) $f(x) = 1$

(2) $f(x) = x$

(3) $f(x) = x^2$

(4) $f(x)=b^2-x^2$

(5) $f(x)=1$ لكل $x\in(0,b/2)$ ، $f(x)=0$ لكل $x\in(b/2,b)$

(6) أوجد تمثيل الدالة $f(x) = 1$ بدلالة دوال بيسل $J_0(\alpha_k x)$ حيث $\alpha_k$ هي حلول $J_0'(\alpha b)=0$ الموجبة.

(7) أثبت أن $\lambda=\alpha^2=0$ قيمة ذاتية للمعادلة (5.31) بالشرط الحدي (5.32) إذا وفقط إذا كان $\frac{\beta_1}{\beta_2}\geq-\frac{\nu}{b}$ ، وأن الدالة الذاتية المناظرة لهذه القيمة هي $x^\nu$.

(8) إذا كان $\beta_2=0$ أو إذا كان $\frac{\beta_1}{\beta_2}\geq-\frac{\nu}{b}$ فأثبت أنه لا يوجد قيم ذاتية سالبة للمسألة (5.31)، (5.32).

(9) احسب $\|J_\nu(\alpha x)\|^2$ بالشرط الحدي (5.32) مطبقا على $J_\nu(\alpha x)$.

(10) أوجد منشور الدالة $f(x)=x$ على الفترة $[0,1]$ بدلالة $J_1(\alpha_k x)$ حيث $\alpha_k$ هي أصفار $J_1$ الموجبة.

(11) أوجد منشور الدالة $f(x)=x^n$ على $[0,1]$ بدلالة $J_n(\alpha_k x)$ حيث $n\in\mathbb{N}$ والأعداد $\alpha_k$ هي أصفار $J_n'$ الموجبة.

(12) افرض أن

$$f(x)=\begin{cases} x \quad , & x\in(0,1) \\ 0 \quad , & x\in(1,2) \end{cases}$$

أوجد المتسلسلة $\sum c_k J_1(\alpha_k/2x)$ التي تمثل f على $[0,2]$ ، علما بأن $\alpha_k$ هي أصفار $J_1'$.

(13) تسمى المعادلة

$$u_t=k\,\Delta u$$

حيث

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (5.39)$$

مؤثر لابلاس و t متغير الزمن ، **معادلة الحرارة** (heat equation) ، وفيها تمثل $u(x,y,z,t)$ درجة الحرارة عند النقطة $(x,y,z)$ واللحظة t. في الإحداثيات القطبية $(r,\theta)$ على المستوي $z = 0$ تأخذ المعادلة (5.39) الشكل

$$u_t = k(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta})$$

افرض أن الدالة u مستقلة عن θ وأن $u(r,t) = v(r)w(t)$ ، ثم استنتج أن

$$v'' + \frac{1}{r}v' + \lambda^2 v = 0$$

$$w' + \lambda^2 k w = 0$$

حيث λ عدد ثابت.

(14) في التمرين (13) افرض أن درجة الحرارة $u(r,t)$ على القرص المستوي $0 \le r \le 1$ تحقق $u(1,t) = 0$ ، أي أنها تساوي الصفر على حافة القرص. أثبت أن

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 kt} J_0(\lambda_n r) \qquad (5.40)$$

حيث $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ أصفار الدالة $J_0$.

(15) إذا كان توزيع درجة الحرارة على القرص عند اللحظة $t = 0$ هو $u(r,0) = f(r)$ حيث f دالة معلومة ، فأثبت أن **معاملات فورير - بيسل** في الصيغة (5.40) هي

$$A_n = \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 f(r) J_0(\lambda_n r) r dr$$

(16) في الإحداثيات الاسطوانية $(r,\theta,z)$ تأخذ معادلة لابلاس الصورة

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2} + u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0$$

(i) استخدم فصل المتغيرات للحصول على الحل

$$u(r,\theta,z) = [J_\nu(\alpha r) + AY_\nu(\alpha r)](B\cos\nu\theta + \sin\nu\theta)(e^{-\alpha z} + Ce^{\alpha z})$$

(ii) على افتراض أن $\nu \geq 0$ وأن $\alpha > 0$ استنتج صيغة الحل المحدود على الاسطوانة $\{(r , \theta , z) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi , 0 \leq z\}$.

(iii) على افتراض أن الدالة u أحادية القيمة في المتغير $\theta$ فما هي قيم n المسموح بها؟

5.31 Apply Lemma 3.7 to Equations (5.24) and (5.25).

س١

5.33 (a) $\langle 1, J_0(\mu_k x)\rangle_x = \int_0^b J_0(\mu_k x) x dx = \dfrac{b}{\mu_k} J_1(\mu_k b)$, $\|J_0(\mu_k x)\|_x^2 = \dfrac{b^2}{2} J_1^2(\mu_k b)$.
Therefore

$$1 = \frac{2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k J_1(\mu_k b)} J_0(\mu_k x).$$

, b = 2

س٢

(c) $\langle x^2, J_0(\mu_k x)\rangle_x = \left(\dfrac{b^3}{\mu_k} - \dfrac{4b}{\mu_k^3}\right) J_1(\mu_k b)$. Hence

, b = 2

$$x^2 = \frac{2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 b^2 - 4}{\mu_k^3 J_1(\mu_k b)} J_0(\mu_k x).$$

(e) $\langle f, J_0(\mu_k x)\rangle_x = \displaystyle\int_0^{b/2} J_0(\mu_k x) x dx = \frac{b}{2\mu_k} J_1(\mu_k b/2)$. Hence

(5.2) (i) 9 تمرين

(5.2) ١٨ تمرين

$$f(x) = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_k b/2)}{\mu_k J_1^2(\mu_k b)} J_0(\mu_k x).$$

س١٠

5.35 From Exercises 5.13 and 5.14(a) we have $\langle x, J_1(\mu_k x)\rangle_x = \int_0^1 J_1(\mu_k x) x^2 dx = -J_0(\mu_k)/\mu_k = J_2(\mu_k)/\mu_k$, and, from Equation (5.34), $\|J_1(\mu_k x)\|_x^2 = \frac{1}{2} J_2^2(\mu_k)$. Therefore

معادلة (5.38)

$$x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k J_2(\mu_k)} J_1(\mu_k x), \qquad 0 < x < 1.$$

س١٢

5.37 Using the results of Exercises 5.13 and 5.14(a),

$$\begin{aligned}\langle f, J_1(\mu_k x)\rangle_x &= \int_0^1 x^2 J_1(\mu_k x) dx = \frac{1}{\mu_{k^3}} \left[2\mu_k J_1(\mu_k) - \mu_k^2 J_0(\mu_k)\right] \\ &= \frac{1}{\mu_k} J_2(\mu_k).\end{aligned}$$

Bessel's equation also implies

$$\|J_1(\mu_k x)\|_x^2 = 2[J_1'(2\mu_k)]^2 + \frac{1}{2\mu_k^2}(4\mu_k^2 - 1) J_1^2(2\mu_k) = \frac{4\mu_k^2 - 1}{2\mu_k^2} J_1^2(2\mu_k).$$

Consequently,

$$f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k J_2(\mu_k)}{(4\mu_k^2 - 1) J_1^2(2\mu_k)} J_1(\mu_k x), \qquad 0 < x < 2.$$

This representation is not pointwise. At $x = 1$, $f(1) = 1$ whereas the right-hand side is $\frac{1}{2}[f(1^+) + f(1^-)] = \frac{1}{2}$.

5.39 Assuming $u(r,t) = v(r)w(t)$ leads to

$$\frac{w'}{kw} = \frac{1}{v}\left(v'' + \frac{1}{r}v'\right) = -\mu^2.$$

Solve these two equations and apply the boundary condition to obtain the desired representation for $u$.

5.41 Use separation of variables to conclude that

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k r)[a_k \cos \mu_k ct + b_k \sin \mu_k ct),$$

$$a_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k R)} \int_0^R f(r) J_0(\mu_k r) r dr,$$

$$b_k = \frac{2}{c\mu_k R^2 J_1^2(\mu_k R)} \int_0^R g(r) J_0(\mu_k r) r dr.$$

# Chapter 6

6.1 (a) $\hat{f}(\xi) = \frac{2}{\xi^2}(1 - \cos\xi)$. (c) $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{i\xi}\left(1 - e^{-i\xi}\right)$.

6.3 For any fixed point $\xi \in J$, let $\xi_n$ be a sequence in $J$ which converges to $\xi$. Because

$$|F(\xi_n) - F(\xi)| \leq \int_I |\varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)|\, dx,$$

and $|\varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)| \leq 2g(x) \in \mathcal{L}^1(I)$, we can apply Theorem 6.4 to the sequence of functions $\varphi_n(x) = \varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)$ to conclude that

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |F(\xi_n) - F(\xi)| &\leq \lim_{n\to\infty} \int_I |\varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)|\, dx \\ &= \int_I \lim_{n\to\infty} |\varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)|\, dx = 0.\end{aligned}$$

6.5 Suppose $\xi \in J$, and let $\xi_n \to \xi$. Define

$$\psi_n(x,\xi) = \frac{\varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)}{\xi_n - \xi},$$

then $\psi_n(x,\xi) \to \varphi_\xi(x,\xi)$ pointwise. $\psi_n$ is integrable on $I$ and, by the mean value theorem, $\psi_n(x,\xi) = \varphi_n(x,\eta_n)$ for some $\eta_n$ between $\xi_n$ and $\xi$.

للأسئلة من (13) إلى (16)

representation. From (7.65)

$$r=(x^2+y^2)^{1/2}, \qquad \theta=\arctan\frac{y}{x}, \qquad z=z \tag{7.66}$$

Using the chain rule,

$$u_x=u_r r_x+u_\theta\theta_x=u_r x(x^2+y^2)^{-1/2}-u_\theta y(x^2+y^2)^{-1}$$

$$=u_r\cos\theta-u_\theta\frac{\sin\theta}{r}$$

$$u_{xx}=\left[u_r\cos\theta-u_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right]_r r_x+\left[u_r\cos\theta-u_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right]_\theta\theta_x$$

$$=u_{rr}\cos^2\theta-2u_{r\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+u_r\frac{\sin^2\theta}{r}+2u_\theta\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}+u_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta}{r^2}.$$

Employing (7.66) and the chain rule again,

$$u_y=u_r\sin\theta+u_\theta\frac{\cos\theta}{r}$$

$$u_{yy}=u_{rr}\sin^2\theta+2u_{r\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+u_r\frac{\cos^2\theta}{r}-2u_\theta\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}+u_{\theta\theta}\frac{\cos^2\theta}{r^2}$$

Therefore,

$$\nabla^2u=u_{rr}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+u_r\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{r}\right)+u_{\theta\theta}\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{r^2}\right)+u_{zz}$$

or

$$\nabla^2u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz} \tag{7.67}$$

In the *xy* or polar plane (7.67) becomes

$$\nabla^2u(r,\theta)=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

Other specializations are considered in BVPs.

## 7.11. TEMPERATURE IN A CIRCULAR DISK WITH INSULATED FACES

We assume that the radius of the disk is two units. The initial temperature, dependent only on the radius of the disk, is $f(r)$. The outer circumference is kept at zero temperature. As suggested in the title the plane faces are insulated. See Figure 7.4. It is our aim to find the temperature $u(r,t)$. First, it is wise for us to formulate the mathematical model or BVP.

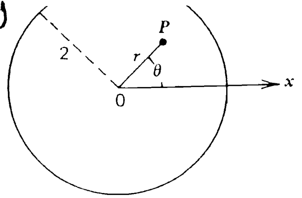


**Figure 7.4.** Polar coordinates for a circular disk.

$$\begin{aligned} &u_t=a^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right), && (0<r<2,\ t>0)\\ &u(2,t)=0, && (t\geqslant 0)\\ &u(r,0)=f(r), && (0<r<2)\\ &|u(r,t)|<M, && (0<r<2,\ t\geqslant 0)\end{aligned} \tag{7.68}$$

In the heat equation of (7.68) we have another specialization of (7.67). In this problem $u$ is dependent only on $r$ and $t$. Therefore, the Laplacian $\nabla^2u$ is dependent on $r$ alone and is written

$$\nabla^2u(r)=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r$$

Our solution follows using the Fourier method.

1. *Separation of Variables.* Let $u(r,t)=R(r)T(t)$. The PDE becomes

$$RT'=a^2\left(R''T+\frac{1}{r}R'T\right)$$

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}=-\alpha^2$$

2. *Related ODEs*:

$$R''+\frac{1}{r}R'+\alpha^2R=0$$

$$T'+\alpha^2a^2T=0$$

3. *Homogeneous Boundary Condition*:

$$u(2,t)=R(2)T(t)=0$$

If $T(t)\not\equiv 0$, then $R(2)=0$.

4. *The R Equation.*

$$rR''+R'+\alpha^2 rR=0; \qquad R(2)=0$$

The differential equation may be written in the form

$$[rR']'+\alpha^2 rR=0$$

This is the same type displayed in (7.48) with $n=0$. Therefore,

$$R(r)=C_1J_0(\alpha r)+C_2Y_0(\alpha r)$$

Since $Y_0$ is unbounded at $r=0$, we select $C_2=0$.

$$R(2)=0=C_1J_0(2\alpha)=0$$

If $C_1\neq 0$, then $J_0(2\alpha)=0$. Thus

$$R_k(r)=J_0(\alpha_k r) \tag{7.69}$$

where $2\alpha_k$ are the positive zeros of $J_0$.

5. *The T Equation.* The new $T$ equation is

$$T'+\alpha_k^2a^2T=0$$

It has a solution

$$T_k(t)=e^{-\alpha_k^2a^2t} \tag{7.70}$$

6. *Solution Set for Homogeneous Conditions.* Using solutions (7.69) and (7.70) in the separation substitution, we have the solution set

$$u_k(r,t)=e^{-\alpha_k^2a^2t}J_0(\alpha_k r) \tag{7.71}$$

7. *Superposition.* The infinite linear combination of (7.71) is the series

$$u(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_ke^{-\alpha_k^2a^2t}J_0(\alpha_k r)$$

8. *Nonhomogeneous Boundary Condition*:

$$u(r,0)=f(r)=\sum_{k=1}^{\infty}A_kJ_0(\alpha_k r)$$

$$A_k=\frac{2}{2^2J_1^2(2\alpha_k)}\int_0^2 rf(r)J_0(\alpha_k r)\,dr$$

9. *Solution of Original BVP*:

$$u(r,t)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{J_1^2(2\alpha_k)}\int_0^2 sJ_0(\alpha_k s)f(s)e^{-\alpha_k^2a^2t}J_0(\alpha_k r)\,ds$$

## 7.12. VIBRATIONS OF A CIRCULAR MEMBRANE DEPENDENT ON DISTANCE FROM CENTER

The displacement of the membrane, represented by $u(r,t)$ is independent of the vectorial angle $\theta$. We assume that initially the displacement is $f(r)$ and the velocity is $g(r)$. The membrane is attached along the circumference of the circle $r=b$ in the plane of the membrane. The BVP follows:

$$\begin{aligned} &u_{tt}=a^2\left[u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right], && (0<r<b,\ t>0)\\ &u(b,t)=0, && (t\geqslant 0)\\ &u(r,0)=f(r), && (0<r<b)\\ &u_t(r,0)=g(r), && (0<r<b)\\ &|u(r,t)|<M, && (0<r<b,\ t\geqslant 0) \end{aligned} \tag{7.72}$$

The solution follows:

1. *Separation of Variables.* Let $u(r,t)=R(r)T(t)$.

$$RT''=a^2\left[R''T+\frac{1}{r}R'T\right]$$

$$\frac{T''}{aT}=\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}R'=-\alpha^2$$

2. *Related ODEs*:

$$rR''+R'+\alpha^2 rR=0$$

$$T''+\alpha^2a^2T=0$$

3. *Homogeneous Boundary Condition*:

$$u(b,t)=R(b)T(t)=0$$

If $T(t)\neq 0$, then $R(b)=0$.

4. *The R Equation*:

$$[rR']'+\alpha^2 rR=0; \qquad R(b)=0$$

The solution of this ODE is

$$R(r)=C_1J_0(\alpha r)+C_2Y_0(\alpha r)$$

but $C_2$ must be assigned zero, since $Y_0$ is unbounded at $r=0$. If the boundary condition is used, then

$$R(b)=C_1J_0(\alpha b)=0$$

If $C_1\neq 0$, then $J_0(\alpha b)=0$ and

$$R_k(r)=J_0(\alpha_k r) \tag{7.73}$$

where $\alpha_k b$ are the zeros of $J_0$.

5. *The T Equation.* The $T$ equation

$$T''+\alpha_k^2a^2T=0$$

has solutions

$$T_k(t)=B_1\cos\alpha_k at+B_2\sin\alpha_k at \tag{7.74}$$

6. *Solution Set for Homogeneous Conditions.* According to the separation substitution and (7.73) and (7.74) we have

$$u_k(r,t)=[B_1\cos\alpha_k at+B_2\sin\alpha_k at]J_0(\alpha_k r) \tag{7.75}$$

7. *Superposition.* We write the linear combination of (7.75) as the series

$$u(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}[K_k\cos\alpha_k at+M_k\sin\alpha_k t]J_0(\alpha_k r)$$

$B_1$ and $B_2$ of (7.75) are absorbed into $K_k$ and $M_k$.

8. *Nonhomogeneous Boundary Conditions.* One of these boundary conditions requires the derivative

$$u_t(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k a[-K_k\sin\alpha_k at+M_k\cos\alpha_k at]J_0(\alpha_k r)$$

At time $t=0$, the two boundary conditions become

$$u(r,0)=f(r)=\sum_{k=1}^{\infty}K_kJ_0(\alpha_k r) \tag{7.76}$$

and

$$u_t(r,0)=g(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k aM_kJ_0(\alpha_k r) \tag{7.77}$$

From (7.76) and (7.77) we write

$$K_k=\frac{2}{b^2J_1^2(\alpha_k b)}\int_0^b rf(r)J_0(\alpha_k r)\,dr$$

and

$$M_k=\frac{2}{\alpha_k ab^2J_1^2(\alpha_k b)}\int_0^b rg(r)J_0(\alpha_k r)\,dr$$

9. *Solution of Original BVP*:

$$u(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}[K_k\cos\alpha_k at+M_k\sin\alpha_k at]J_0(\alpha_k r)$$

where

$$K_k=\frac{2}{b^2J_1^2(\alpha_k b)}\int_0^b rf(r)J_0(\alpha_k r)\,dr$$

and

$$M_k=\frac{2}{\alpha_k ab^2J_1^2(\alpha_k b)}\int_0^b rg(r)J_0(\alpha_k r)\,dr$$

## 7.13. STEADY STATE TEMPERATURE IN A RIGHT SEMICIRCULAR CYLINDER

We assume that half the right circular cylinder has a radius $a$ and a height $b$. It is bounded by the planes $z=0$, $z=b$ and the face $y=0$ which, in cylindrical coordinates, can be described by both $\theta=0$ and $\theta=\pi$. We assume that the lower horizontal plane face is kept at temperature zero. The upper plane surface is kept at temperature $f(r,\theta)$. The plane vertical face remains at zero temperature. In this problem we wish to find the temperature distribution

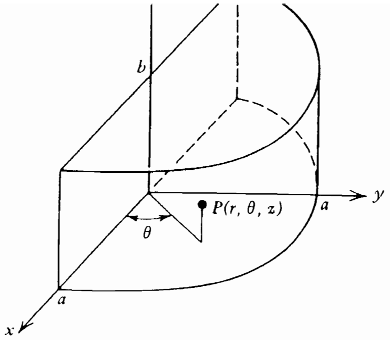


**Figure 7.5.** Half of a circular cylinder.

$u(r, \theta, z)$. See Figure 7.5. The BVP follows:

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}=0, \qquad (0<r<a, 0<\theta<\pi, 0<z<b)$$

$$u(r,0,z)=u(r,\pi,z)=0, \qquad (0<r<a, 0<z<b)$$

$$u(a,\theta,z)=0, \qquad (0<\theta<\pi, 0<z<b)$$

$$u(r,\theta,0)=0, \qquad (0<r<a, 0<\theta<\pi)$$

$$u(r,\theta,b)=f(r,\theta), \qquad (0<r<a, 0<\theta<\pi)$$

$$|u(r,\theta,z)|<M$$

We begin the solution by

1. *Separation of Variables.* Let $u(r,\theta,z)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)$.

$$R''\Theta Z+\frac{1}{r}R'\Theta Z+\frac{1}{r^2}R\Theta''Z+R\Theta Z''=0$$

or

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}+r^2\frac{Z''}{Z}=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\alpha^2$$

If

$$\frac{Z''}{Z}=\beta^2$$

then

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}+r^2\beta^2-\alpha^2=0$$

$$rR''+R'+\left(r\beta^2-\frac{\alpha^2}{r}\right)R=0$$

$$Z''-\beta^2Z=0$$

$$\Theta''+\alpha^2\Theta=0$$

3. *Homogeneous Boundary Conditions*:

$$u(r,0,z)=R(r)\Theta(0)Z(z)$$

If $R(r)\not\equiv 0$ and $Z(z)\not\equiv 0$, then $\Theta(0)=0$.

$$u(r,\pi,z)=R(r)\Theta(\pi)Z(z)=0$$

If $R(r)\not\equiv 0$ and $Z(z)\not\equiv 0$, then $\Theta(\pi)=0$.

$$u(a,\theta,z)=R(a)\Theta(\theta)Z(z)=0$$

If $\Theta(\theta)\not\equiv 0$ and $Z(z)\not\equiv 0$, then $R(a)=0$.

$$u(r,\theta,0)=R(r)\Theta(\theta)Z(0)=0$$

If $R(r)\not\equiv 0$ and $\Theta(\theta)\not\equiv 0$, then $Z(0)=0$.We have enough information here to state a

4. *Related SLP*:

$$\Theta''+\alpha^2\Theta=0; \qquad \Theta(0)=0, \qquad \Theta(\pi)=0$$

The general solution is

$$\Theta(\theta)=C_1\cos\alpha\theta+C_2\sin\alpha\theta$$

$$\Theta(0)=C_1+0=0$$

$$\Theta(\pi)=C_2\sin\alpha\pi=0$$

If $C_2\not\equiv 0$, then $\sin\alpha\pi=0$, $\alpha\pi=n\pi$, $\alpha=n$, and

$$\alpha_n^2=n^2$$

is the set of eigenvalues for the SLP. Eigenfunctions are

$$\Theta_n(\theta)=\sin n\theta, \qquad n\in\mathbf{N} \qquad (7.78)$$

If $n=0$, the SLP has only a trivial solution. Therefore the domain of $n$ is adequate in (7.78).

$$Z'' - \beta^2 Z = 0; \qquad Z(0) = 0$$

The $Z$ equation has a solution

$$Z = B_1 \cosh \beta z + B_2 \sinh \beta z$$

$$Z(0) = B_1 + 0 = 0$$

We fail to have a complete SLP, so the nature of $\beta$ is undetermined at present and

$$Z(z) = \sinh \beta z$$

6. *The R Equation*:

$$[rR']' + \left[ r\beta^2 - \frac{n^2}{r} \right] R = 0; \qquad R(a) = 0$$

This is a Bessel equation where λ is $\beta^2$ and $n = n$. A bounded solution may be expressed as

$$R(r) = J_n(\beta r)$$

However,

$$R(a) = J_n(\beta a) = 0$$

Therefore, $a\beta_{nk}$ are the zeros of $J_n$ and

$$R_{nk}(r) = J_n(\beta_{nk} r), \qquad k \in \mathbf{N} \tag{7.79}$$

Backing up a bit, we can write

$$Z_{nk}(z) = \sinh \beta_{nk} z \tag{7.80}$$

7. *Solution Set for Homogeneous Conditions.* From the single variable function solutions (7.78), (7.79), and (7.80) we write

$$u_{nk}(r, \theta, z) = \sin n\theta \sinh \beta_{nk} z J_n(\beta_{nk} r), \qquad n, \qquad k \in \mathbf{N} \tag{7.81}$$

8. *Superposition.* A double sum is used in this case

$$u(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \sin n\theta \sinh \beta_{nk} z J_n(\beta_{nk} r)$$

$$u(r, \theta, b) = f(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \sin n\theta \sinh \beta_{nk} b J_n(\beta_{nk} r)$$

This may be rewritten

$$f(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \sinh \beta_{nk} b J_n(\beta_{nk} r) \tag{7.82}$$

so that

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \sinh \beta_{nk} b J_n(\beta_{nk} r)$$

are the coefficients of the sine series in (7.82). Therefore,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \sinh \beta_{nk} b J_n(\beta_{nk} r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(r, \theta) \sin n\theta \, d\theta \tag{7.83}$$

However, (7.83) is a Fourier-Bessel series with $A_{nk} \sinh \beta_{nk} b$ as the coefficients in the series. Therefore,

$$A_{nk} \sinh \beta_{nk} b = \frac{2}{a^2 J_{n+1}^2(\beta_{nk} a)} \int_0^a r J_n(\beta_{nk} r) \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(r, \theta) \sin n\theta \, d\theta \right] dr$$

and

$$A_{nk} = \frac{4}{a^2 \pi \sinh \beta_{nk} b J_{n+1}^2(\beta_{nk} a)} \int_0^a \int_0^{\pi} r f(r, \theta) J_n(\beta_{nk} r) \sin n\theta \, d\theta \, dr$$

10. *Solution of the Original BVP*:

$$u(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \sin n\theta \sinh \beta_{nk} z J_n(\beta_{nk} r)$$

where

$$A_{nk} = \frac{4}{a^2 \pi \sinh \beta_{nk} b J_{n+1}^2(\beta_{nk} a)} \int_0^a \int_0^{\pi} r f(r, \theta) J_n(\beta_{nk} r) \sin n\theta \, d\theta \, dr$$

## 7.14. HARMONIC INTERIOR OF A RIGHT CIRCULAR CYLINDER

We assume that the cylinder is bounded by three surfaces $r = a$, $z = 0$, and $z = b$. If $u(r, z)$ is the harmonic function, it is assumed that $u = 0$ on $z = 0$ and $u$ is

$f(z)$ on the surface $r=a$, $(0<z<b)$. We wish to find $u(r, z)$ for the BVP

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=0, \qquad (0<r<a, 0<z<b)$$

$$u(r,0)=u(r,b)=0, \qquad (0<r<a)$$

$$u(a,z)=f(z), \qquad (0<z<b)$$

$$|u(r,z)|<M$$

We begin the solution by

1. *Separation of Variables.* Let $u(r,z)=R(r)Z(z)$

$$R''Z+\frac{1}{r}R'Z+RZ''=0$$

and

$$\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}=-\frac{Z''}{Z}=\alpha^2$$

if $Z$ is to be bounded.

2. *Related ODEs*:

$$Z''+\alpha^2 Z=0$$

$$rR''+R'-\alpha^2 rR=0$$

3. *Homogeneous Boundary Conditions*:

$$u(r,0)=R(r)Z(0)=0$$

If $R(r)\neq 0$, then $Z(0)=0$.

$$u(r,b)=R(r)Z(b)=0$$

If $R(r)\neq 0$, $Z(b)=0$.

4. *A Related SLP*:

$$Z''+\alpha^2 Z=0; \qquad Z(0)=Z(b)=0$$

The SLP has a general solution

$$Z=C_1\cos\alpha z+C_2\sin\alpha z$$

$$Z(0)=C_1+0=0$$

$$Z(b)=C_2\sin\alpha b=0$$

$$\alpha_n^2=\frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

for the eigenvalues. The eigenfunctions are

$$Z_n(z)=\sin\frac{n\pi z}{b}, \qquad n\in\mathbf{N} \tag{7.84}$$

If $n=0$, $Z=0$ for the problem. Therefore, $n$ is adequately described in (7.84).

5. *The Related R Equation*:

$$[rR']'-\alpha^2 rR=0 \tag{7.85}$$

This equation is not quite the same as (7.19) where we considered the solution of the modified Bessel equation. If we let $x=\alpha r$ in (7.19) we obtain

$$r\frac{d^2y}{dr^2}+\frac{dy}{dr}-\left(\alpha^2 r+\frac{n^2}{r}\right)y=0$$

If $y$ is replaced by $R$ and $n=0$, we have (7.85). We must not confuse this $n$ with $n$ in (7.84). A general solution of (7.85) is

$$R=C_1 I_0(\alpha r)+C_2 K_0(\alpha r)$$

However, $K_0$ is unbounded at $r=0$ and $C_2$ needs to be zero. The parameter $\alpha$ has already been determined as $n\pi/b$. Therefore,

$$R_n(r)=I_0\left(\frac{n\pi r}{b}\right)$$

6. *Solution Set for Homogeneous Conditions*:

$$u_n(r,z)=I_0\left(\frac{n\pi r}{b}\right)\sin\frac{n\pi z}{b}, \qquad n\in\mathbf{N}$$

7. *Superposition.* The linear combination is written as a series

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n I_0\left(\frac{n\pi r}{b}\right)\sin\frac{n\pi z}{b}$$

8. *Nonhomogeneous Boundary Condition*:

$$u(a,z)=f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n I_0\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{b}\right), \qquad (0<z<b)$$

$$A_n I_0\left(\frac{n\pi a}{b}\right)=\frac{2}{b}\int_0^b f(z)\sin\frac{n\pi z}{b}\,dz$$

and

$$A_n=\frac{2}{bI_0\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\int_0^b f(z)\sin\frac{n\pi z}{b}\,dz$$

9. *Solution for the Original BVP*:

$$u(r,z)=\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_0(n\pi r/b)}{I_0(n\pi a/b)}\int_0^b f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{b}\sin\frac{n\pi z}{b}\,d\xi$$

**Exercises 7.4**

1. In a cylindrical region, $(r<1, 0<z<2)$, solve the steady state temperature problem

$$\begin{aligned}&u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=0, && (0<r<1, 0<z<2)\\ &u(1,z)=0, && (0<z<2)\\ &u(r,2)=0, && (0<r<1)\\ &u(r,0)=f(r), && (0<r<1)\\ &|u(r,z)|<M\end{aligned}$$

2. Determine the steady state solution for the temperature distribution $u(r,z)$ in a cylinder of radius 1 and height $h$ given that

$$\begin{aligned}&u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=0, && (0<r<1, 0<z<h)\\ &u(1,z)=0, && (0<z<h)\\ &u(r,h)=0, && (0<r<1)\\ &u(r,0)=T_0, && (0<r<1)\\ &|u(r,z)|<M\end{aligned}$$

3. A thin elastic circular membrane vibrates transversely so that the following BVP models its behavior. Find $u(r,t)$.

$$\begin{aligned}&u_{tt}=a^2\left[u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right], && (0<r<2, t>0)\\ &u_t(r,0)=0, && (0<r<2)\\ &u(2,t)=0, && (t\geqslant 0)\\ &u(r,0)=f(r), && (0<r<2)\\ &|u(r,t)|<M\end{aligned}$$

4. Find a harmonic function $u(r,z)$ for the inside of a cylinder bounded by $r=a$, $z=0$ and $z=h$ if $u=0$ on the surface $r=a$ and $z=0$, and $u=f(r)$ on the plane surface $z=h$.

$$\begin{aligned}&u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=0, && (0<r<1, 0<z<2)\\ &u(r,2)=0, && (0<r<1)\\ &u_r(1,z)=ku(1,z), && (0<z<2, k>0)\\ &u(r,0)=f(r), && (0<r<1)\\ &|u(r,z)|<M\end{aligned}$$

6. A solid is bounded by long concentric cylinders. The inner cylinder has a radius $p$ and the outer cylinder has a radius $q$. Diffusivity is $a^2$. Inner and outer surfaces are kept at zero temperatures and the initial temperature is dependent on $r$ alone, given by $f(r)$. Find the temperature $u(r,t)$. The BVP follows:

$$\begin{aligned}&u_t=a^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right), && (p<r<q, t>0)\\ &u(p,t)=u(q,t)=0, && (t\geqslant 0)\\ &u(r,0)=f(r), && (p<r<q)\\ &|u(r,t)|<M\end{aligned}$$

7. A membrane is stretched over a circular frame and attached along the circumference of the frame. The radius of the frame is $c$. The membrane is struck in such a manner that its initial displacement is $f(r,\theta)$. It is released from rest. Determine the displacement $u(r,\theta,t)$. The BVP follows:

$$\begin{aligned}&u_{tt}=a^2\left[u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right], && (0<r<c, 0<\theta<2\pi, t>0)\\ &u(c,\theta,t)=0, && (0<\theta<2\pi, t\geqslant 0)\\ &u_t(r,\theta,0)=0, && (0<r<c, 0<\theta<2\pi)\\ &u(r,\theta,0)=f(r,\theta), && (0<r<c, 0<\theta<2\pi)\\ &|u(r,\theta,t)|<M\end{aligned}$$

8. Write the BVP for the motion of a vibrating membrane in Figure 7.6. Assume that the membrane is fixed along the quarter of the circle $r=2$ and along the line segments $\theta=0$ and $\theta=\pi/2$. It is released from rest at $t=0$ from the given position $f(r,\theta)$. Find the displacement $u(r,\theta,t)$.

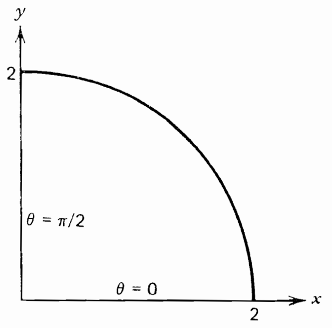


**Figure 7.6.** Quarter circle vibrating membrane.

سبق أن ذكرنا في مستهل هذا الفصل أن الدالة $\hat{f}$ حلّت محل معـاملات فوريير عندما انتقلنا من الدوال الدورية إلى الدوال غير الدورية، ومـا المعادلـة (6.14) سـوى الوجه الآخر لسلوك هذه المعاملات عندما $n \to \infty$ . لكن النظرية (6.2)، وهي تحدد بعض خواص التحويـل $\hat{f}$ ، لا تتطرق إلى الخاصة الأساسية المستمدَّة من العلاقة (6.3)، ألا وهي إمكانية تمثيل الدالة f بالتكامل

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \qquad (6.15)$$

فكأن هذه الصيغة تمثل التحويل العكسي

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

الذي نستعيد به الدالة f، أي أن

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \qquad (6.16)$$

لكن التكـامل (6.15)، المعـروف **بتكـامل فوريير** (Fourier integral) قـد لا يكـون موجودا، إذا لم تتلاش الدالة $\hat{f}$ عندما $|\xi| \to \infty$ بالسرعة الكافيـة، وإن وجـد فقـد لا تتحقق المساواة (6.16) نقطيا على $\mathbb{R}$. هذا ما سنبحثه في البند القادم.

## تمارين (6.1)

(1) (i) إذا كانت الفترة I محدودة فأثبت أن

$.f\in\mathcal{L}^2(I) \Rightarrow f\in\mathcal{L}^1(I)$

(ii) إذا كانت f دالة محدودة على I فأثبت أن

$.f\in\mathcal{L}^1(I) \Rightarrow f\in\mathcal{L}^2(I)$

(2) افرض أن $\varphi: J\times I \to \mathbb{C}$ حيث I و J فـترتان فـي $\mathbb{R}$ وأن $\varphi(\cdot,x)$ دالـة متصلـة على J لكـل $x\in I$. إذا كان $|\varphi(\xi,x)| \le g(x)$ لكـل $x\in J$، حيث $g\in\mathcal{L}^1(I)$ ،

فاستخدم نظرية التقارب المسقوف (6.1) لإثبات أن الدالة $F(\xi)=\int_I \varphi(\xi,x)dx$ متصلة على J.

(3) إذا كانت الدالة $\varphi(\cdot,x)$ في التمرين (2) متصلة قطعيًا على J فأثبت أن الدالة F أيضا متصلة قطعيًا على J.

(4) إذا كانت الدالة $\varphi_\xi(\cdot,x)$ في التمرين (2) متصلة على J فأثبت أن F قابلة للاشتقاق وأن $F'(\xi) = \int_I \varphi_\xi(\xi,x)dx$ متصلة على J.

(5) واضح أن

$$\int_0^\infty e^{-\xi x}dx = \frac{1}{\xi} \quad \forall \xi > 0$$

أثبت أن لأي عدد موجب a فإن

$$\int_0^\infty x^n e^{-\xi x}dx = \frac{n!}{\xi^{n+1}} \quad \forall \xi \geq a \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

وعندما $\xi = 1$ نحصل على التمثيل التالي لمضروب العدد n

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \Gamma(n+1)$$

(6) إذا كان a أي عدد موجب فاستخدام النظرية (6.1) لاستنتاج أن التكامل المعتل

$$\Gamma(\xi) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\xi-1}dx$$

دالة متصلة على $[a,\infty)$ وأن جميع مشتقاتها

$$\Gamma^{(n)}(\xi) = \int_0^\infty e^{-x}\frac{d^n}{d\xi^n}(x^{\xi-1})dx$$

متصلة على $[a,\infty)$. استنتج من ذلك أن $\Gamma$ دالة تحليلية على $(0,\infty)$.

(7) استخدم التمهيد (6.1) وخواص نواة ديريشليه (راجع البند (3.2)) لتقويم النهايات التالية

(i) $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D_n(\xi)d\xi$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\pi/2} D_n(\xi)d\xi$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} D_n(\xi)d\xi$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \int_{\pi/2}^{\pi} D_n(\xi)d\xi$

(8) افرض أن كلا من الدالتين f و g ملساء قطعيا على $(a,b)$ وأن نقاط عدم اتصال الدالتين ومشتقتيهما هي $\{x_1,...,x_n\}$. أثبت صحة التعميم التالي لقانون التكامل بالتجزيء:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b^-)g(b^-) - f(a^+)g(a^+) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$
$$+\sum_{i=1}^{n} g(x_i^-)[f(x_i^+) - f(x_i^-)] + \sum_{i=1}^{n} f(x_i^-)[g(x_i^+) - g(x_i^-)]$$
$$+\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^+) - f(x_i^-)][g(x_i^+) - g(x_i^-)]$$

## (6.2) تكامل فورير

ليس من العسير التحقق من وجود التكامل المعتل (راجع التمرين 1.3.10)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

وذلك بملاحظة أن $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ، وأن

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n \tag{6.17}$$

حيث

$$A_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx > 0 \quad , \quad n = 0,1,2,\cdots$$

5.39 Assuming $u(r,t) = v(r)w(t)$ leads to

$$\frac{w'}{kw} = \frac{1}{v}\left(v'' + \frac{1}{r}v'\right) = -\mu^2.$$

Solve these two equations and apply the boundary condition to obtain the desired representation for $u$.

5.41 Use separation of variables to conclude that

$$\begin{aligned} u(r,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k r)[a_k \cos \mu_k ct + b_k \sin \mu_k ct), \\ a_k &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k R)} \int_0^R f(r) J_0(\mu_k r) r dr, \\ b_k &= \frac{2}{c\mu_k R^2 J_1^2(\mu_k R)} \int_0^R g(r) J_0(\mu_k r) r dr. \end{aligned}$$

# Chapter 6

6.1 (a) $\hat{f}(\xi) = \frac{2}{\xi^2}(1 - \cos\xi)$. (c) $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{i\xi}\left(1 - e^{-i\xi}\right)$.

6.3 For any fixed point $\xi \in J$, let $\xi_n$ be a sequence in $J$ which converges to $\xi$. Because

$$|F(\xi_n) - F(\xi)| \leq \int_I |\varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)|\, dx,$$

and $|\varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)| \leq 2g(x) \in \mathcal{L}^1(I)$, we can apply Theorem 6.4 to the sequence of functions $\varphi_n(x) = \varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)$ to conclude that

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |F(\xi_n) - F(\xi)| &\leq \lim_{n\to\infty} \int_I |\varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)|\, dx \\ &= \int_I \lim_{n\to\infty} |\varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)|\, dx = 0. \end{aligned}$$

6.5 Suppose $\xi \in J$, and let $\xi_n \to \xi$. Define

$$\psi_n(x,\xi) = \frac{\varphi(x,\xi_n) - \varphi(x,\xi)}{\xi_n - \xi},$$

then $\psi_n(x,\xi) \to \varphi_\xi(x,\xi)$ pointwise. $\psi_n$ is integrable on $I$ and, by the mean value theorem, $\psi_n(x,\xi) = \varphi_n(x,\eta_n)$ for some $\eta_n$ between $\xi_n$ and $\xi$.

لا يكتب في
هذا الهامش

(ح) نشتق $\frac{1}{ع} = \int_0^{\infty} e^{-عx}\,dx$ بالنسبة ع (إذا يسمح بالاشتقاق) فنحصل على العلاقة المطلوبة.

Therefore $|\psi_n(x,\xi)| \leq h(x)$ on $I \times J$. Now use the dominated convergence theorem to conclude that $\int_I \psi_n(x,\xi)dx \to \int_I \varphi_\xi(x,\xi)dx$. This proves

$$\frac{F(\xi_n) - F(\xi)}{\xi_n - \xi} \to \int_I \varphi_\xi(x,\xi)dx.$$

The continuity of $F'$ follows from Exercise 6.3.

(ii) (i) 7.
↓ ↓ 8
b a

6.8 (a) 1, (b) 1/2, (c) 0.

6.9 Express the integral over $(a, b)$ as a sum of integrals over the subintervals $(a, x_1), \ldots, (x_n, b)$. Because both $f$ and $g$ are smooth over each subinterval, the formula for integration by parts applies to each integral in the sum.

6.10 (a) $f$ is even, hence $B(\xi) = 0$, $A(\xi) = 2\int_0^\pi \sin x \cos \xi x \; dx = 2\dfrac{1 + \cos \pi\xi}{1 - \xi^2}$,

and $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{1 + \cos x\xi}{1 - \xi^2} \cos x\xi \; d\xi.$

(c) $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\xi - \sin \xi}{\xi^2} \sin x\xi \; d\xi.$

6.13 Define

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\cos x, & x > 0 \\ -e^{x}\cos x, & x < 0. \end{cases}$$

Because $f$ is odd its cosine transform is zero and

$$B(\xi) = 2\int_0^\infty e^{-x} \cos x \sin \xi x \; dx = \frac{2\xi^3}{\xi^4 + 4}.$$

Now $f(x)$ may be represented on $(-\infty, \infty)$ by the inversion formula (6.28),

$$e^{-x}\cos x = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi^3}{\xi^4 + 4} \sin x\xi \; d\xi.$$

Because $f$ is not continuous at $x = 0$, this integral is not uniformly convergent.

6.15 Extend

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

as an odd function to $\mathbb{R}$ and show that its sine transform is $B(\xi) = 2(1 - \cos \pi\xi)/\xi$.

6.17 Show that the cosine transform of $f$ is

$$A(\xi) = 2\frac{1 - \cos \xi}{\xi^2} = \frac{\sin^2(\xi/2)}{(\xi/2)^2}.$$

Express $f(x)$ as a cosine integral and evaluate the result at $x = 0$, which is a point of continuity of $f$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \quad , \int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\xi)e^{ix\xi}dx$$

يمثلان دالتين متصلتين ومحدودتين على $\mathbb{R}$ ، هما $2\pi f(x)$ و $2\pi g(x)$ بالترتيب.

نستنتج من ذلك أن الدوال f ، g ، $\hat{f}$ ، $\hat{g}$ جميعها تقع في $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ، وأن

$$\begin{aligned}2\pi\langle f,g\rangle &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\hat{g}(\xi)e^{ix\xi}}d\xi dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,dxd\xi\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi\\ &= \langle\hat{f},\hat{g}\rangle \qquad (6.30)\end{aligned}$$

وعندما تكون g = f فإننا نحصل على العلاقة

$$||\hat{f}||^2 = 2\pi||f||^2 \qquad (6.31)$$

التي تناظر **متطابقة بارسيفال** (1.12)، وتشكل مع المعادلة (6.30) ما يسمى **بنظرية بلانشيريل** (Plancherel theorem). وحقيقة الأمر أن (6.30) و (6.31) تظل صحيحة لأي $f,g\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ لكن برهان ذلك يعتمد على إثبات أن $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})\cap\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ كثيفة في $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ، بمعنى أن كل $f\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ هي نهاية ، في $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ، لمتتالية من الدوال في $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})\cap\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (انظر [8]).

## تمارين (6.2)

أوجد تكامل فورير لكل من الدوال المعطاة في التمارين (1) إلى (5) :

$$f(x)=\begin{cases}|\sin x| & , \quad |x|<\pi\\ 0 & , \quad |x|>\pi\end{cases} \qquad (1)$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0<x<1 \\ 0 & , \quad x<0 \ , \ x>1\end{cases} \qquad (2)$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & , \quad 0<x<\pi \\ 0 & , \quad x<0 \ , \ x>\pi\end{cases} \qquad (3)$$

$$f(x)=xe^{-|x|} \quad , \quad x\in\mathbb{R} \qquad (4)$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & , \quad 0<x<\pi/2 \\ -\cos x & , \quad -\pi/2<x<0\end{cases} \qquad (5)$$

(6) استنتج من التمرين (3)أن

$$\int_0^\infty \frac{\xi\sin\pi\xi}{1-\xi^2}d\xi=\frac{\pi}{2}$$

(7) أثبت أن

$$\int_0^\infty \frac{\xi^3\sin x\xi}{\xi^4+4}d\xi=\frac{\pi}{2}e^{-x}\cos x \quad \forall x>0$$

هل هذا التكامل متقارب بانتظام على $(0,\infty)$؟

(8) أثبت أن

$$\int_0^\infty \frac{\xi\cos x\xi}{1+\xi^2}d\xi=\frac{\pi}{2}e^{-x} \quad \forall x>0$$

هل هذا الكامل متقارب بانتظام على $(0,\infty)$؟

(9) أثبت أن

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos\pi\xi}{\xi}\sin x\xi d\xi=\begin{cases}\pi/2 & , \quad 0<x<\pi \\ 0 & , \quad x>\pi\end{cases}$$

(10) أثبت أن

$$\mathcal{F}[e^{-|x|}](\xi)=\frac{2}{1+\xi^2}$$

ثم استخدم ذلك لإيجاد $(\xi)\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right]$ .

(11) على اقتراض أن

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & , \quad |x|\leq 1\\ 0 & , \quad |x|>1\end{cases}$$

أثبت أن

$$\hat{f}(\xi)=\left[\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}\right]^2$$

ثم استنتج أن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\xi}{\xi^2}d\xi=\pi$$

(12) تحقق من صحة العلاقة

$$\|\hat{f}\|^2=2\pi\|f\|^2$$

عندما تكون $f(x)=e^{-|x|}$.

(13) عبر عن العلاقة (6.31) بدلالة التحويلين A و B المعرفين في (6.23) و(6.24).

## (6.3) خواص تحويل فورير وتطبيقاته

تنص النظرية التالية على خواص الاشتقاق الأساسية التي تميِّز تحويل فورير وتجعله أداة لا غنى عنها في التعامل مع المعادلات التفاضلية الخطية.

**نظرية (6.4)**

افرض أن $f\in\mathscr{L}^1(\mathbf{R})$

(i) إذا كان $x\,f(x)\in\mathscr{L}^1(\mathbf{R})$ فإن الدالة $\hat{f}$ قابلة للاشتقاق، ومشتقتها

$$\hat{f}'(\xi)=-i\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)e^{-i\xi x}dx=\mathcal{F}[-ixf(x)](\xi) \qquad (6.32)$$

① f زوجية $\Leftarrow$ $B(\xi)=0$ ،

$$A(\xi) = 2\int_0^{\pi} \sin x \cos \xi x\, dx$$

$$= 2 \cdot \frac{1+\cos \pi\xi}{1-\xi^2}$$

و

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1+\cos \pi\xi}{1-\xi^2} \cos x\xi \, d\xi$$

⑧ نعرف:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\cos x , & x>0 \\ -e^{x}\cos x , & x<0 \end{cases}$$

حيث أن f فردية فإن تحويل جيب التمام لها = صفر

و

$$B(\xi) = 2\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x \sin \xi x \, dx = \frac{2\xi^3}{\xi^4+4}$$

١) ∴ f(x) لها تمثيل تكاملي $(-\infty,\infty)$

بالصيغة العكسية (6.29) نحصل على التالي

$$e^{-x}\cos x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\xi^3}{\xi^4+4} \sin x\xi \, d\xi$$

حيث أن f ليست متصلة عند $x=0$ فإن هذا التكامل الأخير ليس متقاربًا بانتظام

⑨ هكذا نضيف فرع آخر (للسؤال)

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2} , & 0<x<\pi \\ \frac{\pi}{4} , & x=\pi \\ 0 , & x>\pi \end{cases}$$

نحدد الدالة $f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases}$ كدالة فردية على $\mathbb{R}$ فإن تحويل الجيب لها هو:

$$B(\xi) = \frac{2(1-\cos \pi\xi)}{\xi}$$

(11) أثبت أن تحويل جيب التمام لـ f هو :

$$A(\xi) = 2 . \frac{1-\cos\xi}{\xi^2} = \frac{\sin^2(\xi/2)}{(\xi/2)^2}$$

وأحسب تكامل جيب التمام كمرس f التحجب عند $x = 0$ ، التي هي نقطة اتصال لـ f

(13) المعادلة (6.31) تقتضي أن

$$\|\hat{f}\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 = 2\pi \|f\|^2$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi}{1-\xi^2}\left[\sin(\xi(\pi - x)) - \sin\xi x\right] d\xi$$ ③

⑥ في الحل في تمرين ③ ضع $x = \pi$

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi}{1-\xi^2}\left[-\sin\xi\pi\right] d\xi$$

$$\frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi}{1-\xi^2} \sin\xi\pi \, d\xi$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\xi \sin\xi\pi}{1-\xi^2} d\xi$$

⑦ نوجد تكامل فوريير للجيب للدالة $f(x) = e^{-x}\cos x$ ، $0 < x < \infty$

فنجد العلاقة المطلوبة.

~~⑧ نوجد تكامل فوريير للجيب للدالة $f(x) = e^{-x}$ ، $0 < x < \infty$~~

~~فنجد العلاقة المطلوبة.~~

س١ (تفصيل الكل)

لأن $F$ دالة زوجية فان $B(\xi)=0$

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\xi)\cos(x\xi)\,d\xi$$

$$A(\xi)=2\int_0^\infty F(x)\cos(x\xi)\,dx$$

$$=2\int_0^\pi \sin x\cdot\cos(x\xi)\,dx$$

$$=2\int_0^\pi \frac{\sin(1+\xi)x+\sin(1-\xi)x}{2}\,dx$$

توضيح

$$\cos(\pi+\xi)\pi=\cos(\pi+\pi\xi)$$
$$=\cos\pi\cos\pi\xi-\sin\pi\sin\pi\xi$$
$$(-1)\cos\pi\xi-0$$

$$=\frac{-\cos(1+\xi)x}{1+\xi}\Big|_0^\pi-\frac{\cos(1-\xi)x}{1-\xi}\Big|_0^\pi$$

$$=\frac{+1}{1+\xi}\left[+\cos(\pi\xi)+1\right]$$

$$+\frac{1}{1-\xi}\left[+\cos(\pi\xi)+1\right]$$

$$A(\xi)=\left(\cos(\pi\xi)+1\right)\left[\frac{1}{1+\xi}+\frac{1}{1-\xi}\right]$$

$$=\left(\cos(\pi\xi)+1\right)\left(\frac{2}{1-\xi^2}\right)$$

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\left(\cos(\pi\xi)+1\right)}{1-\xi^2}\cdot\cos(x\xi)\,d\xi$$

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t}e^{i\xi x}d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi y}dy\right]e^{-k\xi^2 t}\ e^{i\xi x}d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i(x-y)\xi}e^{-k\xi^2 t}d\xi dy$$

على افتراض أنه يجوز تبديل ترتيب التكامل بالنسبة للمتغيرين $\xi$ و $y$. بما أن الدالة $e^{-k\xi^2 t}$ زوجية في $\xi$ فإن

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(y)\cos(x-y)\xi\ e^{-k\xi^2 t}d\xi dy \qquad (6.46)$$

بما يتفق مع النتيجة السابقة.

## تمارين (6.3)

(1) أثبت صحة العلاقتين

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi)$$

$$\mathcal{F}[e^{iax}f(x)](\xi) = \hat{f}(\xi-a)$$

(2) تعرَّف **دالة هرميت** ذات الرتبة $n$ بأنها

$$\Psi_n(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}H_n(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

حيث $H_n$ كثيرة حدود هرميت ذات الرتبة $n$. أثبت أن

$$\hat{\Psi}_n(\xi) = i^n\sqrt{2\pi}\,\Psi_n(\xi)$$

(3) أوجد حل معادلة الحرارة

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) \quad , \quad 0 < x < \infty, t > 0$$

بالشروط الحدية

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 < x < \infty$$

حيث $f \in \mathscr{L}^1(0,\infty)$.

(4) أوجد حل المعادلة التكاملية

$$\int_0^\infty f(x)\cos\xi x dx = \begin{cases} 1 & , \quad 0<\xi<\pi \\ 0 & , \quad \pi<\xi<\infty \end{cases}$$

(5) أثبت أن

$$\int_0^\infty e^{-k\xi^2 t}\cos(x-y)\xi d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{kt}}e^{-(x-y)^2/4kt}$$

(6) (i) استخدم نتيجة التمرين (5) في المعادلة (6.45) للحصول على

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+2\sqrt{2kt}\,p)e^{-p^2}dp$$

(ii) افرض أن $f(x) = T_0$ على الفترة $(-a,a)$، حيث $T_0$ ثابت، وأن $f(x) = 0$ خارج الفترة $[-a,a]$. استخدم تعريف دالة الخطأ في التمرين 5.1.7 للحصول على التمثيل

$$u(x,t) = \frac{T_0}{2}\left[\operatorname{erf}(\frac{x+a}{2\sqrt{kt}}) - \operatorname{erf}(\frac{x-a}{2\sqrt{kt}})\right]$$

(iii) ابحث سلوك في الدالة $u(x,t)$ عندما $|x| \to \infty$ وعندما $t \to \infty$، ثم قدم تفسيرًا فيزيائيًا لذلك السلوك.

لا يكتب في
هذا الهامش

② تعديل المساواة:

$\tilde{\psi}_n(\xi) = (-1)^n \sqrt{2\pi}\, \psi_n(\xi)$ Hermite function of order $n$, $n \in \mathbb{N}$

تصحيح: استخدم مثال (6-5) ولا يشترط [illegible] $n$

⑤ $z \Rightarrow x-y$ و $b \longrightarrow kt$

⑥ اكمال دون:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_0^\infty f(y)\left[e^{-\frac{(y-x)^2}{4kt}} - e^{-\frac{(y+x)^2}{4kt}}\right] dy$$

6.19 Equation (6.31) implies that $\left\|\hat{f}\right\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 = 2\pi\|f\|^2$.

2 س

6.21 $\psi_n(x)$ decays exponentially as $|x| \to \infty$, so it belongs to $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ and $\hat{\psi}$ therefore exists. From Example 6.17 we have $\hat{\psi}_0(\xi) = \sqrt{2\pi}\psi_0(\xi)$. Assuming $\hat{\psi}_n(\xi) = (-i)^n\sqrt{2\pi}\psi_n(\xi)$, we have

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_{n+1}(\xi) &= \mathcal{F}\left(e^{-x^2/2}H_{n+1}(x)\right)(\xi) \\
&= \mathcal{F}\left[e^{-x^2/2}(2xH_n(x) - H_n'(x))\right](\xi) \\
&= \mathcal{F}\left[x\psi_n(x) - \psi_n'(x)\right](\xi) \\
&= i\hat{\psi}_n'(\xi) - i\xi\hat{\psi}_n(\xi) \\
&= (-i)^{n+1}\sqrt{2\pi}[-\psi_n'(\xi) + \xi\psi_n(\xi)] \\
&= (-i)^{n+1}\sqrt{2\pi}\psi_{n+1}(x),
\end{aligned}$$

where we used the identity $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$ and Theorem 6.15. Thus, by induction, $\hat{\psi}_n(\xi) = (-i)^n\sqrt{2\pi}\psi_n(\xi)$ is true for all $n \in \mathbb{N}_0$.

5 س

6.23 Define the integral $I(z) = \int_0^\infty e^{-b\xi^2}\cos z\xi\, d\xi$ and show that it satisfies the differential equation $I'(z) = -zI(z)/2b$, whose solution is $I(z) = I(0)e^{-z^2/4b}$, where $I(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/b}$. → 6.42

3 س

6.25 The boundary condition at $x = 0$ implies $A(\lambda) = 0$ in the representation of $u(x,t)$ given by (6.39), so that $u$ is now an odd function of $x$. By extending $f(x)$ as an odd function from $(0,\infty)$ to $(-\infty,\infty)$ we can see that $B(\lambda)$ is the sine transform of $f$ and the same procedure followed in Example 6.18 leads to the desired result.

6.27 The transformed wave equation $\hat{u}_{tt}(\xi,t) = -c^2\xi^2\hat{u}(\xi,t)$ under the given initial conditions is solved by $\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\cos c\xi t$. Taking the inverse Fourier transform yields the required representation of $u$.

[illegible]

## Chapter 7

7.1 (a) $\dfrac{2a^2}{s^3} + \dfrac{2ab}{s^2} + \dfrac{b^2}{s}$.

(d) $\dfrac{1}{s^2+4}$.

(g) $\dfrac{2s}{(s^2-1)^2}$.

(i) $\sqrt{\pi/s}$.

# تطبيقات تحويل وتكامل فورييه في حل بعض المعادلات التكاملية .

احل بحث 4

مثال : اوجد حل المعادلات التكاملية

$$\hat{f}(\xi) = \int_0^\infty f(x)\cos(x\xi)\,dx = \begin{cases} 1 & , \ 0<\xi<\pi \\ 0 & , \ \pi<\xi<\infty \end{cases}$$

$A(\xi) = 2\int_0^\infty f(x)\,c$

مجهول $f(x) = ??$

$$\frac{\hat{f}(\xi)}{2} = A(\xi) - iB(\xi)$$

$$\hat{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x\xi)\,dx = \frac{2}{2}\int_0^\infty f(x)\cos(x\xi)\,dx$$

اذا

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} 2 & , \ 0 < \xi < \pi \\ 0 & , \ \pi < \xi < \infty \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}(\xi)\cos(x\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\cos(x\xi)\,d\xi = \frac{2}{\pi}\left.\frac{\sin(x\xi)}{x}\right|_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin(\pi x)}{x}$$

لن نثبت هذه النظرية ولن نحتاج إلى استخدامها لإيجاد f(x) عندما تكون F(s) معلومة ، وإنما سنعتمد على جداول تحويلات لابلاس في ذلك. لكن تدل النظرية على أن تحويل لابلاس

$$f \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} F$$

متباين ، بمعنى أن

$$F_1 = F_2 \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F_1] = \mathcal{L}^{-1}[F_2]$$

أي أن الدوال المختلفة لها تحويلات مختلفة ، على افتراض أن هذه الدوال تتمتع بخواص الملوسة المنصوص عليها آنفا. وبناء على ذلك نستطيع أن نكتب

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right] = \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

حيث نعتبر الطرف الأيمن مساويا للعدد 1 عندما $n = 1$ ، كما أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a})\right]$$

$$= \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})$$

$$= \sinh ax$$

## تمارين (7.1)

أوجد تحويل لابلاس لكل من الدوال في التمارين (1) إلى (8) :

$$f(x) = (a+bx)^2 \qquad (1)$$

$$f(x) = \sin^2 x \tag{2}$$

$$f(x) = \sin x \cos x \tag{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} c & 0 < x < a \\ 0 & a < x < \infty \end{cases} \tag{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} a - \frac{a}{b}x \ , & 0 < x < b \\ 0 \ , & x > b \end{cases} \tag{5}$$

$$f(x) = x \cos x \tag{6}$$

$$f(x) = x^2 e^x \tag{7}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ , \quad x > 0 \tag{8}$$

**ملحوظة**: يدل التمرين الأخير على أن محدودية الدالة $e^{-\alpha x}f(x)$ على $(0,\infty)$ ليس ضرورية لوجود $\mathcal{L}[F]$.

أوجد $\mathcal{L}^{-1}[F]$ لكل من الدوال في التمارين من (9) إلى (15):

$$F(s) = \frac{a}{s+b} \tag{9}$$

$$F(s) = \frac{2s-5}{s^2-9} \tag{10}$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)} \tag{11}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2+2s} \tag{12}$$

$$F(s) = \frac{3(s-1)}{s^2-6} \tag{13}$$

$$F(s)=\frac{1}{s^{3/2}} \qquad (14)$$

$$F(s)=\frac{14s^2+55s+51}{2s^3+12s^2+22s+12} \qquad (15)$$

## (7.2) خواص الاشتقاق والانسحاب

نقدم في النظرية التالية تأثر تحويل لابلاس بالاشتقاق والتكامل.

**نظرية (7.2)**

(i) افرض أن الدالة f متصلة وأن $e^{-\alpha x}f(x)$ محدودة على $[0,\infty)$ لثابت ما $\alpha$. إذا كانت المشتقة $f'$ متصلة قطعيا فإن

$$\mathscr{L}[f']=s\mathscr{L}[f]-f(0) \quad , \quad s>\alpha \qquad (7.6)$$

(ii) إذا كانت الدالة f متصلة قطعيا والدالة $e^{-\alpha x}f(x)$ محدودة على $[0,\infty)$ فإن

$$\mathscr{L}[\int_0^x f(t)dt]=\frac{1}{s}\mathscr{L}[f(x)] \quad , \quad x>0 \ , \ s>\alpha \qquad (7.7)$$

**البرهان**

(i) واضح من المعطيات أن شروط وجود $\mathscr{L}\ [f']$ محققة. باستخدام التكامل بالتجزيء نجد أن

$$\mathscr{L}[f']=\int_0^\infty e^{-sx}f'(x)dx \quad , \quad s>\alpha$$

$$=e^{-sx}f(x)\Big|_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

$$=s\mathscr{L}[f]-f(0)$$

لا يكتب في
هذا الهامش

① $\cancel{(a)}$ $\frac{2a^2}{s^3} + \frac{2ab}{s^2} + \frac{b^2}{s}$

③ $\frac{1}{s^2+4}$

⑧ $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$

⑩ $2\cosh 3x - \frac{5}{3}\sinh 3x$

⑫ $\frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$

⑭ $2\sqrt{\frac{\cancel{x}}{\pi}}$

**تدريب** : ارسم الدالة $y(t)$.

**مثال (7.5)**

تتحول معادلة لاقير

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0 \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad , \quad x > 0$$

بتأثير $\mathcal{L}$ إلى

$$\frac{d}{ds}[s^2Y - sy(0) - y'(0)] + sY - y(0) + \frac{d}{ds}[sY - y(0)] + nY = 0$$

$$-2sY - s^2Y' + y(0) + sY - y(0) + Y + sY' + nY = 0$$

$$(s - s^2)Y' + (n + 1 - s)Y = 0$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{n+1-s}{s(s-1)} = \frac{n}{s-1} - \frac{n+1}{s}$$

$$Y(s) = c\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$$

$$\Rightarrow y(x) = c\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}\right]$$

$$= ce^x\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^n}{(s+1)^{n+1}}\right]$$

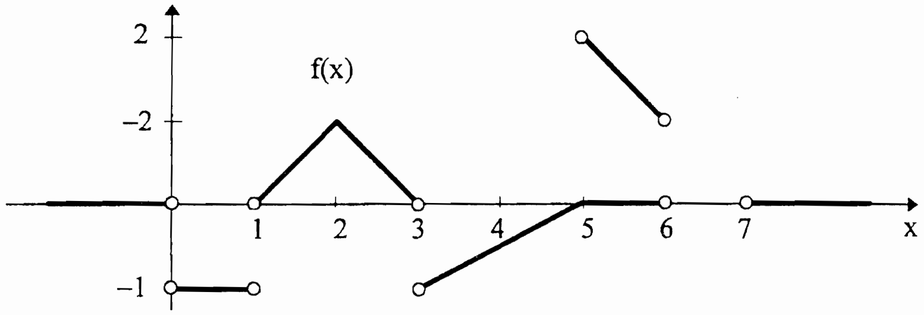
$$= \frac{c}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$$

وباختيار $c = 1$ نحصل على الصيغة (4.26) لكثيرات حدود لاقير.

## تمارين (7.2)

(1) عبر عن الدوال التالية بدلالة دالة الوحدة الدرجية u.

(i)



**شكل (7.3)**

$$\text{(ii)}\quad f(x)=\begin{cases} e^{-x} & , \quad 0<x<2 \\ \cos\pi x & , \quad 2<x<7/2 \\ \sin\pi x & , \quad 7/2<x<9/2 \\ (2/9)x & , \quad x>9/2 \end{cases}$$

(2) ارسم الدوال التالية ثم اوجد تحويل لابلاس لكل منها

(i) $(x-1)u(x-1)$

(ii) $(x-1)^2u(x-1)$

(iii) $x^2u(x-1)$

(iv) $e^{-x}u(x-2)$

(v) $u(x-1)\sinh x$

(vi) $u(x-\frac{\pi}{2})\cos x$

(3) ارسم الدوال التالية التي يفترض أنها 0 خارج الفترة المعطاة، ثم اوجد تحويل لابلاس لكل منها

(i) $e^x \quad , \quad 0<x<1$

(ii) $x^2 \quad , \quad 1<x<2$

(iii) $1-e^{-x} \quad , \quad 0<x<1$

(iv) $\cos\pi x \quad , \quad 1<x<2$

(4) أوجد تحويل لابلاس العكسي لكل من

(i) $e^{-6s}/s^3$

(ii) $\dfrac{e^{-s}}{s^2+2s+2}$

(iii) $\dfrac{1}{s}(e^{-3s}+e^{-s})$

(iv) $\dfrac{1}{s-1}(e^{-3s}+e^{-s})$

(v) $\dfrac{1+e^{-\pi s}}{s^2+9}$

(5) أوجد الحل لكل مما يلي

(i) $y''+4y'+5y=0 \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=1$

(ii) $9y''-6y'+y=0 \quad , \quad y(0)=3 \quad , \quad y'(0)=1$

(iii) $y''+4y'-10y=12\cos 2x \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=3$

(iv) $y''+2y'-8y=-256x^3 \quad , \quad y(0)=15 \, , \, y'(0)=36$

(v) $y''+2y'-8y=-e^{-3x}+3e^{-5x} \quad , \quad y(0)=4 \quad , \quad y'(0)=-2$

(vi) $y''+2y'+2y=x[u(x)-u(x-1)]$

(vii) $y''+y=\begin{cases}\sin x & , \ 0<x<\pi \\ -2\sin x & , \ x>\pi\end{cases} \quad , y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=1$

(6) استخدم المعادلة (7.9) أو المعادلة (7.10) لإيجاد تحويل تحويل لابلاس العكسي لكل من

(i) $\dfrac{s}{(s^2+9)^2}$

(ii) $\log\dfrac{s+a}{s+b}$

(iii) $\log\dfrac{s}{s-1}$

(iv) $\cot^{-1}(s+1)$

(7) تعرَّف الدالة $Si : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بالتكامل المعتل

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

وتسمى **تكامل الجيب** (Sine integral). أثبت أن

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \tan^{-1}\frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[Si(x)] = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

(8) افرض أن كلا من الدالتين $f$ و $g$ تتلاشى على $(-\infty,0)$. يترتب على ذلك أن **التفاف** الدالتين (convolution)

$$f*g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(t)dt$$

$$= \int_0^x f(x-t)g(t)dt$$

إذا كان $\mathcal{L}[f]$ و $\mathcal{L}[g]$ موجودان فأثبت أن

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \,.\, \mathcal{L}[g]$$

(9) إذا كانت الدالـــــة $f$ دورية في $p$ ، بمعنى أن $f(x + p) = f(x)$ لكل $x \geq 0$ ، فأثبت أن

$$\mathcal{L}[f] = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-sx} f(x)dx \quad , \quad s > 0$$

(10) افرض أن $f(x) = x$ لكل $0 \leq x < 1$ ، $f(x + 1) = f(x)$ لكل $x \geq 0$ ، $f(x) = 0$ لكل $x < 0$. أوجد $\mathcal{L}[f]$.

(11) إذا كانت $f(x) = e^x$ و $g(x) = 1/\sqrt{\pi x}$ فأثبت أن

$$f*g(x) = e^x \operatorname{erf}(\sqrt{x})$$

استنتج من ذلك صيغة $\mathcal{L}[e^x \operatorname{erf}\sqrt{x}]$ وكذلك $\mathcal{L}[\operatorname{erf}\sqrt{x}]$

(12) أوجد $\mathscr{L}[[x]]$ ، حيث $[x]$ هو الجزء الصحيح من العدد (غير السالب) $x$ ، أي أن

$$[x] = n \qquad \forall\, x \in [n, n+1) \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

7.2 (b) $2\cosh 3x - \frac{5}{3}\sinh 3x.$

(d) $\frac{1}{2}\left(1 - e^{-2x}\right).$

(f) $2\sqrt{x/\pi}.$

7.5 $f(x) = x[H(x) - H(x-1)] + e^{1-x}H(x-1).$

$$\mathcal{L}(f)(\xi) = \frac{1}{s^2}\left(1 - e^{-s}\right) - \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s+1}e^{-s}.$$

4(iii) س 7.6 (c) $H(x-3) + H(x-1).$

7.7 If $f$ has jump discontinuities at the points $x_1, \ldots, x_n$ then the sum $f(x_1^-) - f(x_1^+) + \cdots + f(x_n^-) - f(x_n^+)$ has to be added to the right-hand side of (7.6).

7.8 (e) $y(x) = H(x-1)\left[\frac{1}{2}e^{2(x-1)} - e^{x-1} + \frac{1}{2}\right] - e^x + e^{2x}.$

6(ii) س 7.9 (c) $\frac{1}{x}\left(e^{-bx} - e^{-ax}\right).$

9 س 7.11 (a) Write

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_{np}^{(n+1)p} f(x)e^{-sx}dx \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^p f(x+np)e^{-s(x+np)}dx,\end{aligned}$$

then use the equation $f(x+np) = f(x)$ to arrive at the answer.

10 س (b) $\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-s}}\left[\frac{1}{s^2}(1-e^{-s}) - \frac{e^{-s}}{s}\right].$

7.13 The left-hand side is the convolution of $x^3$ and $y(x)$. Applying Theorem 7.14 gives $3!Y(s)/s^4 = F(s)$, from which $Y(s) = s^4F(s)/6$. From Corollary 7.7 we conclude that

$$y(x) = \frac{1}{6}f^{(4)}(x) + \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}[f(0^+)s^3 + f'(0^+)s^2 + f''(0^+)s + f'''(0^+)].$$

The integral expression for $f(x)$ implies that $f^{(n)}(0^+) = 0$ for $n = 0, 1, 2, 3$ (we also know from Exercise 7.12 that $s^n$ cannot be the Laplace transform of a function in $\mathcal{E}$ for any $n \in \mathbb{N}_0$). Assuming that $f$ is differentiable to fourth order (or that $y$ is continuous), the solution is $y(x) = f^{(4)}(x)/6$.

12

7.15 $\mathcal{L}([x])(s) = \dfrac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}.$

7.17 $u(x,t) = H(t - x/c)\cos^2(t - x/c).$

7.19 $u(x,t) = e^{-x/c}H(t - x/c)\sin(t - x/c).$

7.21 $F(s) = e^{-a\sqrt{s}}/\sqrt{s}$ is analytic in the complex plane cut along the negative axis $(-\infty, 0]$. Using Cauchy's theorem, the integral along the vertical line $(\beta - i\infty, \beta + i\infty)$ can be reduced to two integrals, one along the bottom edge of the cut from left to right, and the other along the top edge from right to left. This yields

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(F)(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)e^{sx}ds \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos a\sqrt{s}}{\sqrt{s}}e^{-sx}ds \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-xt^2}\cos at\ dt.\end{aligned}$$

Noting that the last integral is the Fourier transform of $e^{-xt^2}$, and using the result of Example 6.17, we obtain the desired expression for $\mathcal{L}^{-1}(F)(x)$.

if either $f$ or $g$ is (piecewise) continuous, and (piecewise) smooth if either $f$ or $g$ is (piecewise) smooth (Exercise 7.16).

8

If $f(x)$ and $g(x)$ are dominated as $x \to \infty$ by $e^{\alpha x}$, then one can easily check that $f * g(x)$ will be dominated by $e^{\beta x}$ for any $\beta > \alpha$. Consequently, if $f$ and $g$ belong to $\mathcal{E}$, then so does their convolution $f * g$, and its Laplace transform is given by

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f * g)(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} \int_0^x f(t)g(x-t)dtdx \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty H(x-t)f(t)g(x-t)e^{-sx}dtdx \\
&= \int_0^\infty f(t) \int_0^\infty g(y)e^{-s(t+y)}dydt \\
&= \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)(s).
\end{aligned}$$

In the third equality, the order of integration is reversed, and this is justified by the uniform convergence of the double integral on $\operatorname{Re} s \geq \beta + \varepsilon$ for any positive $\varepsilon$. Thus we have proved the following convolution theorem which corresponds to Theorem 6.22 for the Fourier transformation.

### Theorem 7.14

Let $f, g \in \mathcal{E}$. If $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$ and $\mathcal{L}(g)(s) = G(s)$, then

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = F(s)G(s).$$

Now we can go back to Equation (7.19) to conclude that

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-x\sqrt{s/k}}F(s)\right)(t) \\
&= f * \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-x\sqrt{s/k}}\right)(t).
\end{aligned}$$

The function $\mathcal{L}^{-1}(e^{-x\sqrt{s/k}})(t)$ can be evaluated by using the inversion formula (7.4), which requires some manipulations of contour integrals (see Exercise 7.21), or it may be looked up in a table of Laplace transforms. In either case

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-x\sqrt{s/k}}\right)(t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi k t^3}}e^{-x^2/4kt},$$

hence

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi k}} \int_0^t f(t-\tau)\tau^{-3/2}e^{-x^2/4k\tau}d\tau. \tag{7.20}$$

Here the solution $u$ differs considerably from that in the first two cases. It tends to 0 as $x \to \infty$ at any time $t$ and also as $t \to \infty$ at any point $x$, and the signal