قسم الرياضيات	**316 ريض**	**الفصل الأول**
جامعة الملك سعود	**الاختبار النهائي**	**2011-1010**

1- حدد المعاملات a، b لكي تصبح الدالـــة $f(x)=ae^{x}+be^{-x}$ عموديـــة علـــى $g(x)=x$ في $\mathcal{L}^2(-1,1)$ وتحقق $\|f\|=1$.

2- (أ) أوجد منشور فوريه للدالة $f(x)=x+1$ على الفترة $[-1,1]$.

(ب) هل التقارب منتظم؟ ولماذا؟

3- أثبت أن $e^{-x/2}=2\sum_{n=0}^{\infty}3^{-n-1}L_n(x)$، حيث L_n كثيرة حدود لاقير المعرّفة بالصيغة

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}e^{x}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right),\quad 0\le x<\infty.$$

إرشاد: أثبت أولا أن

$$\left\langle e^{-x/2},L_n\right\rangle=\int_0^{\infty}e^{-x/2}L_n(x)e^{-x}dx=\frac{1}{n!2^n}\int_0^{\infty}x^n e^{-3x/2}dx,$$

$$\int_0^{\infty}x^n e^{-3x/2}dx=n!(2/3)^{n+1}.$$

4- استخدم التعويض $y(x)=x^{-1/2}u(x)$ لتحويل معادلة بيســـل $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$ إلى الصيغة $u''+u=0$، ومن ثم استنتج الحل العام لمعادلة بيسل المعطاة.

5- أثبت أن $J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ لكل $x>0$، ومن ثم عيّن أصفار الدالة $J_{-1/2}$ وارسم الشـــكل البياني لهذه الدالة.

6- (أ) مثّل الدالة

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|<\pi,\\ 0, & |x|>\pi,\end{cases}$$

بتكامل فوريه بالصيغة المثلثية.

(ب) استنتج من (أ) أن

$$\pi=4\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi\xi\sin\xi}{1-\xi^2}d\xi.$$

لا يكت

هذا الو

السؤال الثاني 2

$$f(x) = x+1 \qquad [-1, 1]$$

$$f(x) = a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x+1)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1}$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}+1\right)-\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}-1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[2] = 1$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi}{L}x\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(x+1)\cos n\pi x\, dx = \cancel{\int_{-1}^{1} x\cos n\pi x\, dx}^{\,0} + \int_{-1}^{1}\cos n\pi x$$

$$= \int_{-1}^{1}\cos n\pi x\, dx = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi}{L}x\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(x+1)\sin n\pi x\, dx = \int_{-1}^{1} x\sin n\pi x\, dx + \cancel{\int_{-1}^{1}\sin n\pi x\, d}^{\,0}$$

$$= 2\int_0^1 x \sin n\pi x\, dx$$

$$2\left[-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\cancel{\int_0^1 \cos n\pi x\, dx}^{\,0}\right]$$

$$2\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\right]$$

$$f \quad \ldots \sum^\infty \quad (-1)^{n+1} \quad \sin n\pi x$$

بأن

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to -1^{+}} f(x) = 0$$

خلاف التقارب غير منتظم مع أن الدالة متصلة على مجالها.

لا يكتب
هذا الهـ

سؤال الثالث :

$$\langle e^{-x/2}, l_n \rangle = \int_0^\infty e^{-x/2}\, l_n e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-x/2} \cancel{(e^{x})} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) \cancel{e^{-x}}\, dx$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-x/2} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\, dx$$

بمواصلة التكامل بالتجزيء n مرة نحصل على

$$\frac{1}{n!\,2^n}\int_0^\infty x^n e^{-3x/2}\, dx$$

ثم نكامل بالتجزيء أيضاً

$$\frac{1}{n!\,2^n}\int_0^\infty \frac{d^n}{dx^n}(x^n)\, e^{-3x/2}\, dx$$

حتى n مرة فنحصل على

$$\frac{1}{n!\,2^n}\int_0^\infty e^{-3x/2}\, dx \quad = n!\,(2/3)^{n+1}$$

ثم لتحقيق المطلوب الأول ننشر $f(x)=e^{-x/2}$ باستخدام المنشور لاجير
حيث نحصل على :

$$f(x) = \sum_0^\infty C_n\, L_n \qquad C_n = \frac{1}{\|L_n\|^2}\langle f(x), L_n\rangle \quad \|L_n\|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow\ C_n = \int_0^\infty f(x)\, L_n(x)$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-x/2} \cancel{e^{x}} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \cancel{e^{-x}}\, dx$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-x/2} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\, dx$$

من الفقرة السابقة

$$= n!\,(2/3)^{n+1}$$

لا يسحب
هذا الهـ

السؤال الرابع

$$y = x^{-\frac{1}{2}} u(x)$$

$$y' = x^{-\frac{1}{2}} u'(x) - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} u(x)$$

$$y' = x^{-\frac{1}{2}} \left[u' - \frac{1}{2} x^{-1} u \right]$$

$$y'' = x^{-\frac{1}{2}} \left[u'' - \frac{1}{2} x^{-1} u'' + \frac{1}{2} x^{-2} u \right] - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \left[u' - \frac{1}{2} x^{-1} u \right]$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} \left[u'' \left(1 - \frac{1}{2x}\right) + \frac{u}{2x^2} \right] - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \left[u' - \frac{1}{2x} u \right]$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} \left[u'' \left(1 - \frac{1}{2x}\right) + \frac{u}{2x^2} \right] - \frac{1}{2x} u' + \frac{u}{2x^2}$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} \left[u'' \left(1 - \frac{1}{2x}\right) + \frac{u}{x^2} - \frac{u'}{2x} \right]$$

بالتعويض في

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$ نحصل على

$$\left[u'' \left(1 - \frac{1}{2x}\right) + \frac{u}{x^2} - \frac{u'}{2x} \right] + x^{\frac{1}{2}} \left[u' - \frac{1}{2x} u \right] + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) x^{-\frac{1}{2}} u(x)$$

$$\left(u'' \left(1 - \frac{1}{2x}\right) + \frac{u}{x^2} - \frac{u'}{2x} \right) + x^{\frac{1}{2}} u' - \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} +$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}$$

لا يكتب
هذا الهامش

١ السؤال السادس

$$f(x) = \begin{cases} \sin & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$

الدالة فردية وعليه

$$\hat{f}(\xi) = B(\xi)$$

$$B(\xi) = 2\int_0^{\infty} f(x)\, \sin(x\xi)\, dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin x \, \sin x\xi \, dx$$

$$= \cancel{2}\int_0^{\pi} \frac{\cos(1-\xi) - \cos(1+\xi)}{\cancel{2}}\, dx$$

$$\int_0^{\pi} \cos(1-\xi)\, dx - \int_0^{\pi} \cos(1+\xi)\, dx$$

$$= \frac{\sin(1-\xi)x}{1-\xi}\Big|_0^{\pi} - \frac{\sin(1+\xi)x}{1+\xi}\Big|_0^{\pi}$$

$$\frac{\sin(1-\xi)\pi}{1-\xi} - \frac{\sin(1+\xi)\pi}{1+\xi}$$

$$\frac{\sin \pi\xi}{1-\xi} + \frac{\sin \pi\xi}{1+\xi} = \frac{2\sin \pi\xi}{1-\xi^2}$$

8

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{2 \sin \pi\xi}{1-\xi^2} \sin x\xi \, d\xi$$

للاستنتاج ،
نضع $x = \frac{\pi}{2}$

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi\xi \, \sin \frac{\pi}{2}\xi}{1-\xi^2}$$

$$1 = \frac{2}{\ldots}\int \frac{2 \sin \pi\xi \, \sin \xi}{\ldots}\, d\xi$$