جامعة المــــــــــلك سعود
كلية العلوم - قسم الرياضيات

المقــــــــــــــــــرر: ٣١٦ ريض
الفصل الدراســــي الأول
الاختبار النهـــــائي ١٤٢٨ - ١٤٢٩ هـ
الزمن : ثلاث ساعات

---

**<u>ألسؤال الأول (١٠ درجات) :</u>**

أ - أوجد القيم والدوال الذاتية للمعادلة

$$x^2 y'' + x y' + \lambda y = 0$$

علي الفترة $(1,5)$ تحت الشروط الحدية $y(1) = y(5) = 0$ .

ب - أستنتج صيغة التعامد بين الدوال الذاتية في الفقرة (أ).

**<u>ألسؤال الثاني (١٠ درجات) :</u>**

أ - أوجد منشور فوريير للدالة

$$f(x) = x + \pi, \qquad -\pi < x < \pi,$$
$$f(x + 2\pi) = f(x), \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

ب - باستخدام نتيجة الفقرة (أ) أستنتج العلاقة

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

**<u>ألسؤال الثالث (١٠ درجات) :</u>**

أ - باستخدام الدالة المولدة لكثيرات حدود لوجندر $\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$ ،

أثبت أن: $(n+1)\, P_{n+1}(x) = (2n+1)\, x\ P_n(x) - n\ P_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}$

ب - إذا كانت $P_1(x) = x$ ، $P_0(x) = 1,$ باستخدام الفقرة (أ) أوجد $P_2(x),\ P_3(x)$

ج - أوجد الحدود الثلاث الأولي (الغير صفرية) من منشور لوجندر للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

<u>باقي الأسئلة في الخلف</u>

## ألسؤال الرابع (١٠ درجات) :

أ - أوجد تكامل فوريير للدالة $f(x)=e^{-kx^2},\ k>0$ ، علما بأن $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{k}}$

ب - باستخدام الفقرة (أ) أستنتج أن

$$\frac{\sqrt{\pi}}{e}=\int_0^{\infty} e^{-\frac{\varsigma^2}{4}}\cos(\varsigma)\,d\varsigma$$

ج - إذا كان $0<p<1$ ، $\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin(px)}$ ،

أثبت أن

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin(px)}.$$

## ألسؤال الخامس (١٠ درجات):

أ - أثبت أن

$$J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x),\quad J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x),\quad x>0$$

ب - أثبت أن $\forall\ x>0$ $J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)$ لكل $n$ .

ج - باستخدام الفقرة (أ) و الفقرة (ب) أستنتج

$$J_{-3/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{x\ \sin(x)+\cos(x)}{x}\right),\quad x>0$$

## السؤال السادس: (٥ درجات) هذا السؤال اختياري:

أ - أثبت أن

$$\int_0^1 x\ J_n(\lambda x)\,J_n(\beta x)\,dx=\frac{\beta\,J_n(\lambda)\,J_n'(\beta)-\lambda\,J_n(\beta)\,J_n'(\lambda)}{\lambda^2-\beta^2},\quad \lambda\neq\beta$$

ب - باستخدام الفقرة (أ) أثبت أن $\int_0^1 x\,J^2{}_n(\lambda x)dx=\frac{1}{2}\left[J_n'^2(\lambda)+\left(1-\frac{n^2}{\lambda^2}\right)J^2{}_n(\lambda)\right]$

ج - إذا كان $\lambda$ و $\beta$ جذران مختلفان للمعادلة $R\,J_n(x)+S\,x\,J_n'(x)=0$ حيث $R$ و $S$ ثوابت. باستخدام الفقرة (أ)، اثبت أن $\int_0^1 x\ J_n(\lambda x)\,J_n(\beta x)\,dx=0$