Kingdom of Saudi Arabia Ministry of Higher Education KING SAUD UNIVERSITY *Deanship of Scientific Research* *College of Science Research Center*		المملكة العربية السعودية وزارة التعليم العالي جامعة الملك سعود عمادة البحث العلمي مركز بحوث كلية العلوم

الإختبار النهائي للفصل الأول (1430-1431) للمقرر 316 ريض

السؤال الأول:

أ) إذا كان: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(x)t^n = e^{2tx-t^2}$ فاثبت أن:

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x),\quad n \in \mathbb{N}$$ 7

ب) ضع المعادلتين التاليتين على شكل معادلة شتورم ليوفيل:

$$\text{i) } x(1-x)u'' - 2xu' + \lambda u = 0,\quad 0 < x < 1$$ 5

$$ii)\ xu'' + (1-x)u' + 5u = 0$$ 5

السؤال الثاني:

أ) أوجد القيم الذاتية و الدوال الذاتية المرتبطة بها للمسألة الحدية التالية: 5

$$x^2u'' + xu' + \lambda u = 0,\quad x > 0$$
$$u(1) = 0,\quad u(e) = 0$$

ب) هل أن $\lambda = 0$ قيمة ذاتية. 5

ج) أثبت أن الدوال الذاتية المحصل عليها متعامدة في $L^2(0,1;\frac{1}{x})$. 5

د) أوجد منثور الدالة $g(x) = 1/2$ بدلالة الدوال الذاتية. 5

السؤال الثالث:

أ) أوجد مفكوك فوريير للدالة: $f(x) = |x| - x,\ -1 < x < 1$ حيث $f(x+2) = f(x)$ ثم استنتج أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$ 7

ب) أوجد تكامل فوريير للدالة f المعرفة كالتالي: 6

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

و استنتج أن:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(\pi\xi) + \xi\sin(\pi\xi)}{1+\xi^2}\,d\xi = \pi e^{-\pi}$$

نموذج تصحيح ٣٢٦ ريض

الاختبار النهائي

الفصل الأول ١٤٣٠ / ٣١

السؤال الأول (أ)

$$(*) \quad e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n$$

باشتقاق طرفي (*) بالنسبة للمتغير x نحصل على

$$(**) \quad 2te^{2tx-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n'(x) t^n$$

وباعتبار أن الطرف الأيسر من (**) هو

$$2te^{2tx-x^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^{n+1}$$

$$= 2\sum_{0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} H_n(x) t^{n+1}$$

$$= 2\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{n!} H_{n-1}(x) t^n \quad (***)$$

بمقارنة (**) و (***) نحصل على أن $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$

ب) نضع المعادلة $x(1-x)u'' - 2xu' + u = 0$ في شكل ~~...~~ معادلة ستورم ليوفيل :

$$p(x) = e^{\int \frac{-2x}{x-x^2}dx} = \frac{1}{(x-1)^{-2}}$$

$$\mu(x) = \frac{(x-1)^2}{x-x^2} = -1 + \frac{1}{x}$$

لضرب المعادلة في $\mu(x)$:

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)(x-x^2)u'' - 2x\left(\frac{1-x}{x}\right)u' + \frac{1-x}{x}u = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left((1-x)^2 u'\right) + \frac{1-x}{x}u = 0$$

$$x u'' + (1-x) u' + 5u = 0$$

$$p(x) = e^{\int \frac{1-x}{x} dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} \cdot e^{-\int dx} = e^{\ln x} \cdot e^{-x} = x e^{-x}$$

$$\mu(x) = \frac{x e^{-x}}{x} = e^{-x}$$

نضرب المعادلة في $\mu(x)$ نجد أن

$$x e^{-x} u'' + e^{-x}(1-x) u' + 5 e^{-x} u = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(x e^{-x} u' \right) + 5 e^{-x} u = 0$$

السؤال الثاني.

$$x^2 u'' + x u' + \lambda u = 0 \, , \quad x > 0$$

(٢) وهي معادلة كوشي أويلر.

المعادلة المميزة:

$$m^2 + \lambda = 0$$

$$m_1 = i\sqrt{\lambda} \, , \quad m_2 = -i\sqrt{\lambda}$$

$\underline{\lambda > 0}$: $\quad u(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} \ln x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} \ln x)$

$$u(1) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 .$$

$$u(x) = C_2 \sin(\sqrt{\lambda} \ln x)$$

$$u(e) = 0 \Leftrightarrow C_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0$$

إذا كان $C_2 = 0$ فإننا نحصل على الحل التافه.

إذا $C_2 \neq 0$

وبالتالي فإن

$$\sin\sqrt{\lambda} = 0 = \sin n\pi \Rightarrow \lambda_n = (n\pi)^2 \, , \, n \geq 1$$

وهي القيم الذاتية، والدوال الذاتية المرتبطة بها هي

$$U_n(x) = \left\{ \sin(n\pi \ln x) \right\}_{n \geq 1}$$

$$x^2 u'' + x u' = 0$$

عند ما $\lambda = 0$ فان

$$\Leftrightarrow \frac{u''}{u'} = -\frac{x}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{du'}{u'} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln\left|\frac{u'}{c}\right| = -\ln|x|$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{u'x}{c}\right| = 0 \Rightarrow \frac{u'x}{c} = 1$$

$$\Leftrightarrow u' = \frac{c}{x} \Leftrightarrow u = c\ln x$$

القيمة الذاتية $\lambda = 0$ ترفق الدالة الذاتية $u = \ln x$

ج)

$$\langle u_n, u_m \rangle = \int_1^e \sin(n\pi \ln x)\sin(m\pi \ln x)\frac{dx}{x}$$

بوضع $t = \ln x \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = dt$

وبالتالي فان:

$$\langle u_n, u_m \rangle = \int_0^1 \sin(n\pi t)\sin(m\pi t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\cos(n-m)\pi t - \cos(n+m)\pi t}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2(n-m)\pi}\sin(n-m)\pi t\Big|_0^1 - \frac{1}{2(n+m)\pi}\sin(n+m)\pi t\Big|_0^1$$

$$= 0, \quad \forall n \neq m.$$

د)

$$g(x) = \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} u_n(x)$$

$$\langle g, u_n \rangle = \int_1^e g u_n \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_1^e \sin(n\pi \ln x)\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(n\pi t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi t)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n \text{ زوجي} \\ \frac{1}{\ldots}, & n \text{ فردي} \end{cases}$$

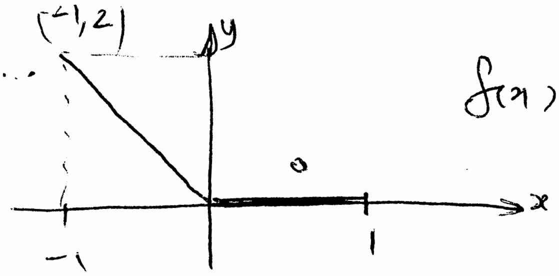
$$\|u_n\|^2 = \int_1^e \sin^2(n\pi \ln x)\,\frac{dx}{x} = \int_0^1 \sin^2(n\pi t)\,dt \qquad (4)$$

$$= \int_0^1 \frac{1-\cos 2n\pi t}{2}\,dt = \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{2} = \frac{2}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{n} \sin(n\pi \ln x)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[2\sin(\pi \ln x) + \frac{2}{3}\sin(3\pi \ln x) + \frac{2}{5}\sin(5\pi \ln x) + \cdots\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\pi \ln x]}{2n+1}.$$



⑤

$f(x) = |x| - x, \quad |x| < 1$

السؤال الثالث : ١٣)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x$$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -\int_{-1}^{0} 2x\,dx = -x^2\Big|_{-1}^{0} = 1$$

$$a_n = -\int_{-1}^{0} 2x \cos n\pi x\,dx = -2\left[\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right]_{-1}^{0}$$

$$= -\frac{2}{(n\pi)^2}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ زوجي} \\ -\dfrac{4}{(n\pi)^2} & n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$b_n = -\int_{-1}^{0} 2x \sin n\pi x\,dx = -2\left[-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{0}\cos n\pi x\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[-1\right]^n.$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + a_1\cos\pi x + b_1\sin\pi x + a_2\cos 2\pi x + b_2\sin 2\pi x + \cdots$$

$$\cos 3\pi x \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos\pi x - \frac{4}{3^2\pi^2}$$

$$\sin 2\pi x - \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi x$$

$$-\frac{2}{\pi}\sin\pi x + \frac{2}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(n\pi x)}{(2n+1)}$$

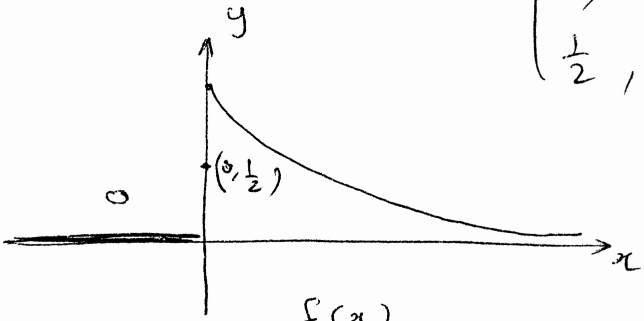
عند $x=0$ نجد

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

السؤال الثالث

٢)

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x<0 \\ \frac{1}{2}, & x=\frac{1}{2} \end{cases}$$



$f(x)$

تكامل فورييه

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[A(\xi)\cos(x\xi)+B(\xi)\sin(x\xi)\right]d\xi$$

$$A(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\xi t)\,dt \quad , \quad B(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\xi t)\,dt$$

$$A(\xi)=\int_0^{\infty} e^{-t}\cos(\xi t)\,dt=\frac{1}{1+\xi^2}$$

$$B(\xi)=\int_0^{\infty} e^{-t}\sin(\xi t)\,dt=\frac{\xi}{1+\xi^2}$$

نحصل فإن ،

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\cos(x\xi)}{1+\xi^2}+\frac{\xi}{1+\xi^2}\sin(x\xi)\right]d\xi$$

حسب نظرية تقارب تكامل فورييه فإنه عند $x=\pi$

$$e^{-\pi}\pi=\int_0^{\infty}\frac{\cos(\pi\xi)+\xi\sin(\pi\xi)}{1+\xi^2}\,d\xi$$