Kingdom of Saudi Arabia		المملكة العربية السعودية
Ministry of Higher Education		وزارة التعليم العالي
KING SAUD UNIVERSITY		جامعة الملك سعود
Deanship of Scientific Research		عمادة البحث العلمي
College of Science Research Center		مركز بحوث كلية العلوم

الإختبار النهائي ا للفصل الأول (1433–1434) للمقرر 316 ريض

السؤال الأول:

أ) أثبت أن الدوال $\{1, sinx, x\}$ مستقلة خطيا في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ ثم استخرج منها ثلاث دوال متعامدة باستخدام طريقة قرام شميدت.

ب) ضع المعادلتين التاليتين في صيغة شتورم-ليوفيل:

1) $x(1-x)y''-2xy'+\lambda y=0$

2) $x^2y''-2xy'+\lambda y=0$

3) $(\cos x)y''+(\sin x)y'+\lambda y=0$

السؤال الثاني:

أ) أوجد القيم الذاتية و الدوال الذاتية للمسألة الحدية

$$\begin{cases} (xu')'+\dfrac{\lambda}{x}u=0 \\ u'(1)=0,\ \ u'(e^{2\pi})=0. \end{cases}$$

ب) هل أن $\lambda = 0$ قيمة ذاتية. إن كانت كذلك, ماهي الدالة الذاتية المرتبطة بها.

السؤال الثالث:

أ) أوجد حل المعادلة التكاملية: $\int_0^\infty f(\xi)\sin(x\xi)\,d\xi = \begin{cases} x, & 0<x<1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$

ب) أوجد تكامل فورييرللدالة f المعرفة كالتالي:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x<0 \\ \frac{1}{2}, & x=0 \end{cases}$$

و استنتج أن: $\int_0^\infty \frac{\cos(\pi\xi)+\xi\sin(\pi\xi)}{1+\xi^2}\,d\xi = \pi e^{-\pi}$

السؤال الرابع

أوجد محولة فورييرللدالة: $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$ ثم استنتج قيمة التكامل:

$$\int_0^\infty \frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

السؤال الخامس

لتكن $P_n(x)$ كثيرات حدود لوجوندر لامتعامدة على$[-1,1]$. أوجد منشور الدالة

$f(x) = |2x - 1|,\ |x| < 1$ بدلالة $P_n(x)$

السؤال السادس

أ) أوجد محولة لابلاس للدالة: $f(x) = sin(4x) + xsin2x$

ب) باستعمال محولة لالبلاس, أوجد حل المسالة الحدية:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4x},\ \ y(0) = 1, y'(0) = 3$$

ملاحظة: اختر سؤال واحد من بين الأسئلة:4,5,6

السؤال الأول/

أ) أثبت أن الدوال $\{x, \sin x, 1\}$ مستقلة خطياً في $L^2(-\pi,\pi)$ ثم استخرج منها ثلاث دوال متعامدة باستخدام طريقة غرام شميت.

الحل/

$\alpha_1 + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 x$

متى تكون مستقلة خطياً ~~يكون~~ $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

$x = \pi \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_3 \pi = 0 \rightarrow (1)$

$x = -\pi \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_3 \pi = 0 \rightarrow (2)$

بجمع (1) مع (2) نجد $2\alpha_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$

بالتعويض في (1) أو (2) نجد $\boxed{\alpha_3 = 0}$

وبالتعويض في (ج) نجد $\boxed{\alpha_2 = 0}$

بالتالي الدوال $\{x, \sin x, 1\}$ مستقلة خطياً

ونجعلها متعامدة بطريقة غرام شميت

$$v_1 = u_1 = 1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

$$\langle u_2, v_1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = 0 \Rightarrow v_2 = u_2 = \sin x$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

$$\langle u_3, v_1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\langle u_3, v_2\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \, dx = -x\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} x\cos x \, dx$$
$$= 2\pi + x\sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

$$\|v_2\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\cos 2x)}{2} dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$\Rightarrow v_3 = x - \frac{2\pi \sin x}{\pi}$$

بالتالي فإن المجموعة $\{1, \sin x, x - 2\sin x\}$ متعامدة

ب) ضع المعادلتين التاليتين في صيغة شتورم ليوفيل:

1) $x^2 y'' - 2x y' + \lambda y = 0 \Rightarrow \boxed{\left(\left(\frac{d}{dx}x^2\right) y'\right) + \lambda y = 0}$ ودالة الثقل فيها $\frac{1}{x}$

2) $x(1-x) y'' - 2x y' + \lambda y = 0 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{d}{dx}\, x(1-x)\right) y' + \lambda y = 0}$ ودالة الثقل فيها $\frac{1}{x(1-x)}$

لا يكتب في هذا الهامش

السؤال الثاني / أ) أوجد القيم الذاتية والدوال الذاتية للمسألة الآتية

$$\begin{cases} (xu')' + \frac{\lambda}{x} u = 0 \\ u'(1) = 0 \ , \ u'(e^{-2\pi}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xu'' + u' + \frac{\lambda}{x} u = 0 \\ u'(1) = 0 \ , \ u'(e^{-2\pi}) = 0 \end{cases}$$

المعادلة $xu'' + u' + \frac{\lambda}{x} u = 0$

تأخذ الشكل $u'' + \frac{u'}{x} + \frac{\lambda}{x^2} u = 0$

وهي معادلة كوشي أويلر وتأخذ الحل

$$m(m-1)P_0 + mQ_0 = 0$$

حيث $P_0 = \lim_{x \to 0} (x-0)\frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1 \quad Q_0 = 1$

$$m(m-1) + m = 0 \Rightarrow m^2 m = 0 \Rightarrow m$$

$$m = -\frac{1}{2} \Leftarrow m = \frac{-1 \pm 1}{2} \Leftarrow \Delta = 1 - 0 = 1$$

$$u = \quad u = e^{\sqrt{\lambda} \ln \frac{1}{x}} = c_1 \cos\sqrt{\lambda} \ln\frac{1}{x} + i \sin\sqrt{\lambda} \ln\frac{1}{x} \ c_2$$

$$u' = \sqrt{\lambda} i c_1 (\sin\sqrt{\lambda} \ln\tfrac{1}{x}) \ln\tfrac{1}{x} - i c_2 \ln\tfrac{1}{x} \sqrt{\lambda} i \cos\sqrt{\lambda} \ln\tfrac{1}{x}$$

$$u'(1) = \sqrt{\lambda} i c_2 \ln\tfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\cancel{u'(e^{-2\pi}) = -i c_2 (-2\pi) \cos = c_2 = 0}$$

$$u = c_1 \cos\sqrt{\lambda} \ln\tfrac{1}{x}$$

$$u'(e^{-2\pi}) = -i 2\pi \sqrt{\lambda} \cos(2\pi\sqrt{\lambda}) c_2$$

$$\cos(2\pi\sqrt{\lambda}) = \cos(n\pi)$$

$$\Rightarrow 2\pi\sqrt{\lambda} = n\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n}{2} \Rightarrow$$

$\left(\lambda_n = \frac{n^2}{4}\right)$ هي القيم الذاتية والدوال الذاتية المرتبطة بها هي

$$u_n(x) = \left\{ \cos\sqrt{\lambda_n} \ln\tfrac{1}{x} \right\}$$

ب) هل $\lambda = 0$ قيمة ذاتية، إن كانت كذلك، ما هي الدالة الذاتية المرتبطة بها

$$\lambda = 0 \Rightarrow u'' + \frac{u'}{x} = 0 \Rightarrow u'' = -\frac{u'}{x} \Rightarrow \frac{u''}{u'} = -\frac{1}{x}$$

$\Rightarrow \int \frac{du'}{du} = e^{-\ln x}$ بأخذ التكامل للطرفين

$$u' + c_1 = e^{-\ln x} \Rightarrow u' = e^{-\ln x} - c_1 \Rightarrow \int u' = \int e^{-\ln x} - \int c_1$$

$$\Rightarrow u + c_2 = -\ln x - \ln c_1 \Rightarrow u = -\ln x - \ln c_1 - c_2$$

$$u'(1) = 0 \Rightarrow -c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$u'(e^{-2\pi}) = 0 \Rightarrow e^{\ln e^{-2\pi}} \ c_1 = 0$$

وبالتالي ليس لها قيمة عندما $\lambda = 0$

لا يكتب في هذا الهامش

السؤال الثالث / أ) أوجد حل المعادلة التكاملية ، $\int_0^\infty f(\xi)\sin(x\xi)\,d\xi = \begin{cases} x, & 0<x<1 \\ 0 & \end{cases}$

$A(\xi) = 0$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(x\xi)\,dx = 2\int_0^\infty f(x)\sin(x\xi)\,dx = \begin{cases} 2x & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$$

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cancel{2}x\sin(x\xi)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 x\sin(x\xi)\,dx = \frac{1}{\xi\pi}x\cos(x\xi)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cos(x\xi)\,dx$$

$$= \frac{1}{\xi\pi}(\cos\xi - 1) + \Big[x\sin(x\xi)\Big]_0^1 = \frac{1}{\xi\pi}(\cos\xi - 1) + \sin\xi$$

ب) أوجد تكامل فورير للدالة f المعرفة كالتالي

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x<0 \\ \frac{1}{2}, & x=0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \Big(f(x)A(\xi) - i f(x)B(\xi)\Big)\,d\xi$$

$$A(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x\xi)\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\cos(x\xi)\,dx$$

$$= \frac{-e^{-x}}{\xi}\sin(x\xi)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\xi}\sin(x\xi)\,dx = \frac{e^{-x}}{\xi^2}\cos(x\xi)\Big|_0^\infty = \frac{1}{\xi^2}$$

$$B(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(x\xi)\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\sin(x\xi)\,dx$$

$$= \frac{e^{-x}}{\xi}\cos(x\xi)\Big|_0^\infty + \frac{e^{-x}}{\xi^2}\sin(x\xi)\Big|_0^\infty = \frac{1}{\xi}$$

$$f(x) = \frac{-i}{2\pi\xi^3}\int_0^\infty e^{-x}e^{-x}\,dx = \frac{-i}{2\pi\xi^3}\int_0^\infty e^{-2x}\,dx = \frac{-i}{2\pi\xi^3}\; -2xe^{-2x}\Big|_0^\infty$$

$=$

لا يكتب في
هذا الهامش

السؤال الخامس / لتكن $P_n(x)$ كثيرات حدود لجوندر على $[-1,1]$ ، أوجد مفكوك الدالة $f(x)=|2x-1|$ $|x|<1$ بدلالة $P_n(x)$

الحل / الدالة $f(x)$ الزوجية تعطى

$P_0(x)=1$

$P_1(x)=x$

$P_2(x)=\frac{x^3}{2}-\frac{1}{2}$

ويكون مفكوك الدالة

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\langle f,P_n\rangle}{\|P_n\|^2}P_n$$

$$\langle f,1\rangle=\int_{-1}^{1}(2x-1)\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}-2x\Big|_{-1}^{1}=-2+2=0$$

$$\langle f,x\rangle=\int_{-1}^{1}(2x^2-x)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\langle f,P_2\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(x^3-1)(2x-1)\,dx=\int_{-1}^{1}(2x^4-x^3-2x+1)\,dx$$

$$=\frac{2}{5}x^5-\frac{x^4}{4}-x^2+x\Big|_{-1}^{1}=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}-1+1\right)-0=\frac{3}{20}$$

$\therefore f(x)=$ $\qquad\qquad$ $\|P_n\|^2=\frac{2}{2n+1}$

$$\sim f(x)=\frac{2x}{3(2n+1)}+\frac{6(x^3-1)}{10(2n+1)}+\cdots$$

$f(x)=|-2x+1|$