جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الفصل الدراسي الأول
العام الدراسي 1437\36
الاختبار النهائي

الزمن: 3 ساعات
مقرر: 316 ريض

أجب عن أربعه اسئلة فقط من الأسئلة الأتية:

السؤال الأول:

أ) اذا كانت متسلسلة فورير للدالة $f(x)$ تكتب على الصورة :

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l})$ حيث $-l\le x\le l$ فبرهن على أن :

-1 $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{\pi}{2}+\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\pi x)J_0(n\pi)$ حيث $-1<x<1$ وأن J_o هى دالة بسل من الرتبة صفر.

ب) إذا كانت الدالة المولدة لبسل تعطى من المعادلة $\exp\{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n$ فبرهن على أن :

$$\cos(x\sin\theta)=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(x)\cos(2n\theta)$$

ت) $J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)$

ث) ....

السؤال الثاني:

أ) أستخدم طريقة ماكلورين ليبنز لايجاد حل المعادلة التفاضلية الأتية:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0$$

ب) برهن على أن حل المعادلة التفاضلية : $\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4xy=0$ عندما تكون $y(0)=1,y'(0)=\sqrt{2}$ يكون على الصورة : $y=\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x+\frac{\pi}{4})\exp(x^2)$

ج) أكتب الدالة المولدة للاجندر ثم استنتج أن: $\int_{-1}^{1}P_n(x)\left(1-2xh+h^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{2h^n}{2n+1}$

السؤال الثالث :

أ) بين أن شرط التعامد لكثيرة حدود هرميت $H_n(x)$ يكون على الصورة:

$$I_{n,m}=\int_{-\infty}^{\infty}H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\,2^n n!\,\delta_{n,m} \quad \text{حيث} \quad \delta_{n,m}=\begin{matrix}0 & m\ne n\\ 1 & m=n\end{matrix}$$

ب) أثبت أن : $e^{t^2}\cos 2xt=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^nH_{2n}(x)\frac{t^{2n}}{2n!}$ & $e^{t^2}\sin 2xt=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^nH_{2n+1}(x)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$

ت) استخدم تحويلات لابلاس لحساب التكامل الاتي : $\int_0^{\infty}x^{\nu}\cos x dx=\Gamma(\nu+1)\cos[\pi(\nu+1)/2]$

السؤال الرابع : إذا كانت الدالة المولدة للاجير تكتب على الصورة :

أ) $(1-t)^{-1}\exp\left(-\dfrac{xt}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}t^{n}L_{n}(x)$ فاستنتج أن :

$$L_n(x)=n!\sum_{r=0}^{n}(-)^{r}\frac{x^{r}}{(r!)^{2}(n-r)!}$$

ت) إذا كانت : $I_{m,n}=\int_{0}^{\infty}e^{-x}L_m(x)L_n(x)dx$ فأوجد شرط التعامد من ذلك التكامل .

ث) باستخدام تحويلات لابلاس أوجد حل المعادلة التفاضلية : $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+xy=0$

السؤال الخامس:

أ) معطى المعادلة التفاضلية $[p(x)y']'+[\lambda r(x)-q(x)]y=0$ والمعرفة على الفترة $0<x<1$ تحت الشروط الحدية : $a_1y(0)+a_2y'(0)=0,\qquad b_1y(1)+b_2y'(1)=0,$ والمعروفة باسم شتورم ليوفيل وكان لدينا المؤثر التفاضلى : $L[y]=-[p(x)y']'+q(x)y$ فبرهن على ان :

$\int_{0}^{1}[L(u)v-uL(v)]dx=0$ فاذا كان لدينا الدالة $\phi=u+iv$ هى القيمة الذاتية وكانت $\lambda=\mu+iv$ فبرهن على أنها حقيقية .

ب) إذا كانت كلا من الدالتين $\phi_1(x)\ \&\ \phi_2(x)$ هما دالتان ذاتيا والمناظرتان لمسائلة شتورم ليوفيل ولهما قيمتان $\lambda_1\neq\lambda_2$ برهن على أن : $\int_{0}^{1}r(x)\phi_1(x)\phi_2(x)dx=0$

ت) عين الدوال الذاتية المتعامدة للمعادلة $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0$ تحت الشروط الحدية $y(0)=0\ \&\ y'(1)+y(1)=0$ ومن ثم أوجد مفكوك الدالة $f(x)=x\ \&\ 0\le x\le 1$