

١- حدد المعاملات a, b في الدالة $aP_0(x) + bP_1(x)$ لكي تحصل على أفضل تقريب في $\mathcal{L}^2(-1,1)$ للدالة $f(x) = e^x$.

٢- (أ) أوجد منشور فورييه للدالة $f(x) = x + |x|$ على الفترة $[-2,2]$. وضع إجابتك برسم الدالة f .
(ب) هل التقارب منتظم؟ ولماذا؟

٣- (أ) أثبت أن $e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n$ لكل $x, t \in \mathbb{R}$.

(ب) أوجد منشور فورييه-لاقيير للدالة $x^2 + x + 1$ على الفترة $[0, \infty)$.

٤- (أ) عرّف دالة قاما على الفترة $(0, \infty)$ واستنتج من ذلك العلاقة التكرارية $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(ب) احسب $\Gamma(1)$ ، ثم استنتج أن $\Gamma(n+1) = n!$ لكل عدد طبيعي n .

٥- أثبت المتطابقة $xJ_\nu'(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x)$ لكل $x > 0$.

٦- (أ) أوجد تحويل فورييه للدالة

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

بالصيغة المثلثية.

(ب) عبر عن f بتكامل فورييه واستنتج من ذلك أن

$$\pi = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \xi}{1 - \xi^2} d\xi.$$