جامعة المـــــــــــلك سعود   المقـــــــــــــــــرر: ٣١٦ ريض

الفصل الدراســــي الثاني

كلية العلوم - قسم الرياضيات   الاختبار النهـــائي ١٤٢٨-١٤٢٩ هـ

الزمن : ثلاث ساعات

ألسؤال الأول (١٠ درجات) :

أ - أوجد القيم والدوال الذاتية لمسألة الشروط الحدية

$$y'' + y' + \lambda y = 0, \qquad y(1) = y(5) = 0$$

ب - ضع المعادلة التفاضلية المزكور فى الفقرة (أ) في صورة شتورم – ليوفيل وعين دالة الثقل .

ج- أستنتج صيغة التعامد بين الدوال الذاتية في الفقرة (أ) .

ألسؤال الثاني (١٠ درجات) :

أ - أوجد منشور فورريير للدالة

$$f(x) = x + \pi, \qquad -\pi < x < \pi,$$
$$f(x + 2\pi) = f(x), \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

ب - باستخدام نتيجة الفقرة (أ) أستنتج العلاقة

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

ألسؤال الثالث (١٠ درجات) :

أ - باستخدام الدالة المولدة لكثيرات حدود لوجندر $e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\ t^n$ ،

أثبت أن: $H_{n+1}(x) = 2x\ H_n(x) - 2n\ P_{n-1}(x)$

ب - أوجد

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_2(x) H_3(x)\, dx \qquad\qquad (2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left[H_2(x)\right]^2\, dx$$

ألسؤال الرابع (١٠ درجات) :

أ - أوجد تكامل فورريير للدالة $f(x) = e^{-kx^2},\ k > 0$ ، علما بأن $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{k}}$

ب - باستخدام الفقرة (أ) أستنتج أن

$$\frac{\sqrt{\pi}}{e} = \int_0^\infty e^{-\frac{\varsigma^2}{4}} \cos(\varsigma)\, d\varsigma$$

ج - إذا كان $0 < p < 1$، $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin(px)}$،

أثبت أن

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(px)}.$$

ألسؤال الخامس (١٠ درجات):

أ - أثبت أن

$$\int_0^1 x\ J_n(\lambda x)\, J_n(\beta x)\, dx = \frac{\beta\, J_n(\lambda)\, J_n'(\beta) - \lambda\, J_n(\beta)\, J_n'(\lambda)}{\lambda^2 - \beta^2}, \quad \lambda \neq \beta$$

ب - باستخدام الفقرة (أ) أثبت أن $\int_0^1 x\, J^2{}_n(\lambda x) dx = \frac{1}{2}\left[J_n'^2(\lambda) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda^2}\right) J^2{}_n(\lambda) \right]$

ج - إذا كان λ و β جذران مختلفان للمعادلة $R\, J_n(x) + S\, x\, J_n'(x) = 0$ حيث R و S ثوابت. باستخدام الفقرة (أ)، اثبت أن $\int_0^1 x\ J_n(\lambda x)\, J_n(\beta x)\, dx = 0$