Kingdom of Saudi Arabia Ministry of Higher Education KING SAUD UNIVERSITY *Deanship of Scientific Research* *College of Science Research Center*		المملكة العربية السعودية وزارة التعليم العالي جامعة الملك سعود عمادة البحث العلمي مركز بحوث كلية العلوم

الإختبار النهائي للفصل الثاني (1429–1430) للمقرر 316

السؤال الأول:

ليكن $L: L^2(I) \cap C^2(I) \to L^2(I)$ المؤثر التفاضلي المعرف ب: $(L = p(x)\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\frac{d}{dx} + r(x))$ حيث $p, r \in C^2(I)$.

أ) متى يكون L قرين لذاته شكلا

ب) متى يكون L قرين لذاته. في هذه الحالة ماذا نقول عن القيم الذاتية للمؤثر L و الدوال الذاتية المرتبطة بها.

ج) ضع المؤثرين التاليين على الشكل: $L = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{d}{dx}) + r(x)$

* $L_1 = x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx} + 5$
* $L_2 = cosx\frac{d^2}{dx^2} + sinx\frac{d}{dx} - cos^2x, \quad \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

السؤال الثاني: أوجد القيم الذاتية و الدوال الذاتية للمسألة الحدية في الحالتين الآتيتين:

$$u'' + \lambda u = 0$$

1) $u'(0) = 0, \ u'(1) = 0$

2) $u(-\pi) = u(\pi), \ u'(-\pi) = u'(\pi)$

في الحالة الأولى أوجد الدوال الذاتية التي تحقق $\int_0^1 u_n^2 dx = 1$

السؤال الثالث:

أ) أوجد مفكوك فوريير للدالة: $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \end{cases}$ حيث $f(x+4) = f(x)$ ثم استنتج أن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

ب) أوجد تكامل فورير للدالة f المعرفة كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} |cosx|, & |x| \le \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

و استنتج أن: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1-\xi^2}(2\cos(\frac{\pi\xi}{2}) - \xi\sin(\pi\xi))d\xi = \frac{\pi}{2}$

ج) باستعمال طريقة متسلسلات القوى أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية: $y'' - xy' - 2y = 0$

اجابة السؤال الاول : (ج $L_1 = x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx} + 5$

لدينا

$$\mu(x) = \frac{1}{x} e^{\int \frac{1-x}{x}dx}$$

$$= \frac{1}{x}\left(e^{\ln x} \cdot e^{-x}\right) = e^{-x} \quad (3)$$

نضرب L_1 في $\mu(x) = e^{-x}$ نجد أن

$$\mu(x)L_1 = e^{-x}x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)e^{-x}\frac{d}{dx} + 5e^{-x} \quad (2)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{d}{dx}\right) + 5e^{-x}.$$

$$L_2 = \cos x\frac{d^2}{dx^2} + \sin x\frac{d}{dx} - \cos^2 x \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

لدينا

$$\mu(x) = \frac{1}{\cos x} e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}dx}$$

$$= \frac{1}{\cos x} e^{-\ln\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad (3)$$

نضرب L_2 في : $\mu(x) = \sec^2 x$

$$\mu(x)L_2 = \frac{1}{\cos x}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\frac{d}{dx} - 1 \quad (2)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}\right) - 1$$

إجابة السؤال الثاني:

(1) $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0 \end{cases}$

المعادلة المميزة: $m^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow m_1 = i\sqrt{\lambda}, m_2 = -i\sqrt{\lambda}$ $(\lambda > 0)$

$$y_{gh} = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

$$y' = -\sqrt{\lambda} C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + \sqrt{\lambda} C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

$$y'(0) = \sqrt{\lambda} C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

إذن، (2)

$$y = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

$$y' = -\sqrt{\lambda} C_1 \sin\sqrt{\lambda} x$$

$$y'(1) = -\sqrt{\lambda} C_1 \sin\sqrt{\lambda} = 0$$

$C_1 \neq 0$ (وإلا لحصلنا على الحل التافه).

والسبب أن (3) $\sqrt{\lambda_n} = n\pi$ إذن $\lambda_n = (n\pi)^2$

$n = 1, 2, \ldots$

وبالتالي فإن الدوال الذاتية المرتبطة بالقيم الذاتية λ_n هي

$$\{U_n(x)\}_{n \geq 1} = \{\cos(n\pi x)\}_{n \geq 1}$$ (2)

---

(2) $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-\pi) = y(\pi), \; y'(-\pi) = y'(\pi) \end{cases}$

$$y(-\pi) = y(\pi) \Leftrightarrow 2C_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

إذن

$$y = C_1 \cos\sqrt{\lambda} x$$

$$y' = -\sqrt{\lambda} C_1 \sin\sqrt{\lambda} x$$ (2)

$$y'(\pi) = y'(-\pi) \Leftrightarrow 2\sqrt{\lambda} C_1 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$$

إذا $C_1 = 0$ فإننا نحصل على الحل التافه

وبالتالي فإن $\sqrt{\lambda}.\pi = n\pi \Leftrightarrow \lambda_n = n^2$ (3)

$n = 1, 2, \ldots$

والدوال الذاتية هي:

$$\{u_n(x)\}_{n\geq 1} = \{\cos n x\}_{n\geq 1}$$

2

$\int_0^1 y_n^2(x)\,dx = 1$ الدوال الذاتية التي تحقق

$$\int_0^1 C_n^2 \cos^2(n\pi x)\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow C_n^2 \int_0^1 \frac{1+\cos 2n\pi x}{2}\,dx = 1$$

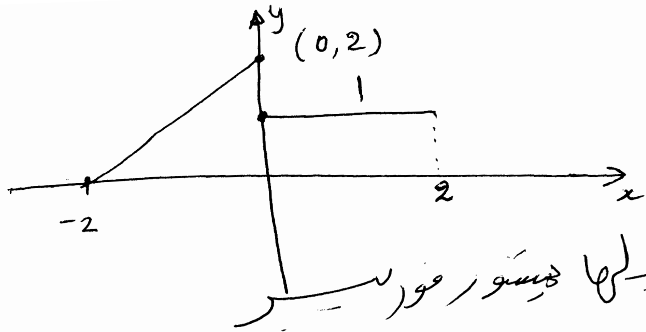
$$\Leftrightarrow C_n^2 \left[\frac{x}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{4\pi n} \sin 2n\pi x \Big|_0^1 \right] = 1$$

4

$$\Leftrightarrow \frac{C_n^2}{2} = 1 \Rightarrow C_n = \sqrt{2}$$

$u_n(x) = \sqrt{2}\cos(n\pi x)$ صالح بأن $n = 1, 2, \ldots$

إجابة السؤال الثالث: ٢)



باختيار أن ل = ٢ فإن f ملساء قطعيا محدودة ودورية فيمكن تمثيلها بمتسلسلة فورير

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2} + b_n \sin\frac{n\pi x}{2}$$

حيث

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(x+2)\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} dx = 2$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(x+2)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}}\Big|_{-2}^{0} - \frac{2}{n\pi}\int_{-2}^{0}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right] + \frac{1}{2}\,\frac{2}{n\pi}\cancel{\sin\frac{n\pi x}{2}}\Big|_{0}^{2} + \frac{1}{n\pi}\cancel{\sin\frac{\pi n x}{2}}\Big|_{-2}^{0}$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0}\right)$$

$$= \frac{2}{(n\pi)^2}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} 0, & n \text{ زوجي} \\ \frac{4}{(n\pi)^2}, & n \text{ فردي} \end{cases}$$ 2

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(x+2)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{2}{n\pi}\cancel{\int_{-2}^{0}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx}\right] - \frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} = \frac{-1}{n\pi}\left[1+(-1)^n\right] = \begin{cases} 0, & n \text{ فردي} \\ \frac{-2}{n\pi}, & n \text{ زوجي} \end{cases}$$ 2

$$f(x) = 1 + a_1\cos\frac{\pi x}{2} + a_2\cos\pi x + \cdots + b_1\sin\frac{\pi x}{2} + b_2\sin\pi x + \cdots$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2} + \cdots + \frac{4\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)\pi^2} + \cdots - \frac{2}{2\pi}\sin\pi x - \frac{2}{4\pi}\sin 2\pi x - \cdots - \frac{2}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{2}x - \cdots$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}$$

عند $x=0$ فإن $\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = 1+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

أي :

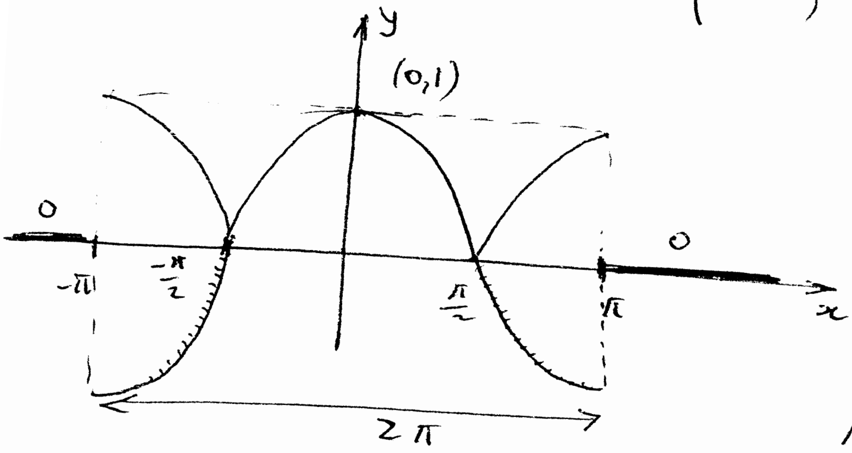
$$\frac{3}{2}-1 = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

اذان

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ب)

$$f(x) = \begin{cases} |\cos x|, & |x| \le \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$



f دالة زوجية :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A(\xi) \cos(x\xi)\, d\xi$$

حيث

$$A(\xi) = 2\int_0^\infty f(x) \cos(x\xi)\, dx$$

$$A(\xi) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos(x\xi)\, dx - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cos(x\xi)\, dx$$

$$= \cancel{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(1+\xi)x + \cos(1-\xi)x}{2}\, dx - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(1+\xi)x + \cos(1-\xi)x}{2}\, dx$$

$$= \frac{\sin(1+\xi)x}{1+\xi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin(1-\xi)x}{1-\xi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin(1+\xi)x}{1+\xi}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{\sin(1-\xi)x}{1-\xi}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$\frac{\cos(\frac{\pi\xi}{2})}{1+\xi} + \frac{\cos(\frac{\pi\xi}{2})}{1-\xi} + \frac{\sin\pi\xi}{1+\xi} + \frac{\cos\frac{\pi}{2}\xi}{1+\xi} + \frac{\sin\pi\xi}{1-\xi} + \frac{\cos\frac{\pi\xi}{2}}{1-\xi}$$

$$= 2\,\frac{\cos\frac{\pi\xi}{2}}{1+\xi} + \frac{2\cos\frac{\pi\xi}{2}}{1-\xi} + \sin\pi\xi\left(\frac{1}{1+\xi} - \frac{1}{1-\xi}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\pi\xi}{2}\left(\frac{1}{1+\xi} + \frac{1}{1-\xi}\right) - \frac{2\xi\sin\pi\xi}{1-\xi^2}$$

$$= \frac{4\cos\frac{\pi\xi}{2}}{1-\xi^2} - \frac{2\xi\sin\pi\xi}{1-\xi^2}$$

$$= \frac{4\cos\frac{\pi\xi}{2} - 2\xi\sin\pi\xi}{1-\xi^2}$$

فيكون ما يأتي :

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{2\cos\frac{\pi\xi}{2} - \xi\sin\pi\xi}{1-\xi^2}\right) \cos x\xi\, d\xi$$

نضع $x=0$ فنجد أن

$$f(0) = 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\left(2\cos\frac{\pi\xi}{2} - \xi \sin \pi\xi\right)}{1-\xi^2}\, d\xi$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^\infty \left(\frac{2\cos\frac{\pi\xi}{2} - \xi \sin \pi\xi}{1-\xi^2}\right) d\xi = \frac{\pi}{2}$$