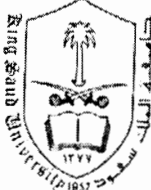


<p>Kingdom of Saudi Arabia Ministry of Higher Education KING SAUD UNIVERSITY Deanship of Scientific Research College of Science Research Center</p>		<p>المملكة العربية السعودية وزارة التعليم العالي جامعة (الملك) سعود عمادة البحث العلمي مركز بحوث كلية العلوم</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

الإختبار الأول للفصل الأول (1429-1430) للمقرر 316

السؤال الأول:

- أ) لتكن $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ مجموعة متعامدة في فضاء الدوال $L^2(a, b)$. متى نقول أنها تامة في $L^2(a, b)$.
- ب) إذا كانت $f \in L^2(a, b)$ و $g \in L^2(a, b)$ فاثبت أن: $(f, g) \leq \|f\| \|g\|$.
- ج) إذا كان $f \in L^2(a, b)$ ، أوجد أفضل تقريب للدالة $f \in L^2(a, b)$ بالنسبة للقياس في $L^2(a, b)$ بدلالة تركيب خطي من عناصر المجموعة $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

السؤال الثاني:

ضع المعادلة التالية على شكل معادلة شتورم ليوفيل:

$$(x - x^2)y'' - 2xy' + y = 0, \quad 0 < x < 1 \quad \text{أ)}$$

ب) هل يمكن تحديد أو إيجاد حل على شكل متسلسلة قوى بجوار $x_0 = 0$ للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + y' \sin x + (1 + x^2)y = 0$$

$$\begin{cases} (e^x u')' + xu + \lambda u = 0 \\ u(1) = 0, \quad u(2) = 0 \end{cases} \quad \text{ج) لتكن لدينا المسألة الحدية:}$$

$$\lambda \int_1^2 e^x (u')^2 dx = \int_1^2 (\lambda + x) u^2 dx \quad \text{أثبت أن:}$$


السؤال الثالث:

$$\begin{cases} (xu')' + \frac{\lambda}{x} u = 0, \quad 1 < x < e \\ u(1) = 0, \quad u(e) = 0. \end{cases} \quad \text{أ) أوجد القيم الذاتية والدوال الذاتية للمسألة الحدية:}$$

$$\text{ب) لتكن لدينا المعادلة التفاضلية: } x^2(x+2)y'' - xy' + (x+1)y = 0, \quad x > 0,$$

حدد نوعية النقطة $x = 0$ ثم أوجد الحل على شكل متسلسلة قوى بجوار $x = 0$.



<p>Kingdom of Saudi Arabia Ministry of Higher Education KING SAUD UNIVERSITY Deanship of Scientific Research College of Science Research Center</p>		<p>المملكة العربية السعودية وزارة التعليم العالي جامعة الملك سعود عمادة البحث العلمي مركز بحوث كلية العلوم</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

الإختبار الثاني للفصل الأول (1429-1430) للمقرر 316

السؤال الأول:

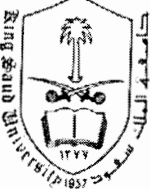
- أ) إذا كان $x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$ فبرهن أن: $e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n$ حيث $H_n(x)$ هي كثيرات حدود هارميت.
و الطرف الأيسر هو الدالة المولدة لكثيرات حدود هارميت.
- ب) لتكن $P_n(x)$ كثيرات حدود لوجوندر المتعامدة على $[-1, 1]$. أوجد منشور الدالة: $f(x) = 1 - x^3, -1 < x < 1$
بدلالة كثيرات حدود لوجوندر $P_n(x)$.

السؤال الثاني:

- أ) أوجد مفكوك فوريير للدالة: $f(x) = x^2, \pi < x < -\pi$ حيث $f(x + 2\pi) = f(x)$ ثم استنتج مجموع المتسلسلتين: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
- ب) أي من المعادلات تحققها كثيرات حدود لوجوندر:
- 2i) $xP'_n - nP_n = P'_n$ i) $xP'_n - nP_n = -P'_n$
4i) $xP'_n - P_n = -P'_{n-1}$ 3i) $nP'_n - xP_n = -P'_{n-1}$

السؤال الثالث:

- أ) أوجد تكامل فوريير للدالة f المعرفة كالتالي:
- $$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\pi\xi) + \xi \sin(\pi\xi) d\xi}{1+\xi^2} = \pi e^{-\pi} \quad \text{واستنتج أن:} \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$
- ب) لتكن الدالة f المعرفة على الفترة $(-\pi, \pi)$ كالتالي: $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & -\pi < x < -a, a < x < \pi \end{cases}$
أوجد الشكل المركب لمتسلسلة فوريير وبين أنه يكافئ الشكل المثلي.

<p>Kingdom of Saudi Arabia Ministry of Higher Education KING SAUD UNIVERSITY Deanship of Scientific Research College of Science Research Center</p>		<p>المملكة العربية السعودية وزارة التعليم العالي جامعة الملك سعود عمادة البحث العلمي مركز بحوث كلية العلوم</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

الإختبار النهائي للفصل الأول (1429-1430) للمقرر 316

السؤال الأول:

أ) ماذا تعني بمسألة شتورم ليوفيل, وماهي أنواعها؟

$$\left\{ \begin{array}{l} (ru')' + p(x)u + \lambda u = 0 \\ u'(a) - \alpha u(a) = 0 \\ u'(b) - \beta u(b) = 0 \end{array} \right. \quad (*) \quad \text{حيث: } \alpha \leq 0, \beta \geq 0$$

ب) لتكن لدينا مسألة شتورم ليوفيل التالية:

$$\lambda \int_a^b f^2 dx - \int_a^b r f'^2 dx = - \int_a^b p(x) f^2 dx + \beta r(b) f^2(b) - \alpha r(a) f^2(a)$$

ج) إذا كانت u تحقق المسألة (*), فاثبت أن:

إذا كان $p(x) \leq C$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$, فاثبت أن جميع القيم الذاتية للمسألة (*) تحقق $\lambda \geq -C$.

السؤال الثاني:

أ) أثبت أن: $xJ'_v(x) + J_v(x) = xJ_{v-1}(x)$

ب) استخدم أ) للبرهان على أن: $\frac{d}{dx}(x^v J_v(x)) = x^v J_{v-1}(x)$

ج) من السؤال ب) استنتج أن: $\int_0^x r J_0(r) dr = x J_1(x)$

السؤال الثالث:

لتكن لدينا المسألة الحدية: $\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0, u(\pi) = 0 \end{cases}$

أ) أوجد الدوال الذاتية التي تحقق $\int_0^\pi u_n^2 dx = 1$

ب) إذا عوض الشرط: $u(0) = 0$ بالشرط: $u'(0) = 0$ فاوجد الدوال الذاتية المتعامدة على $[0, \pi]$.

السؤال الرابع:

أ) أوجد تكامل فوريير للدالة f المعرفة كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases} \quad \text{حيث أن: } f(x + \pi) = f(x)$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\pi\xi) + 1}{1 - \xi^2} \cos(\pi\xi) d\xi = \frac{\pi}{2} \quad \text{واستنتج أن:}$$

ب) باستعمال طريقة فروينوس أوجد الحل العام للمعادلة: $3xy'' + (2-x)y' - y = 0$

السؤال الخامس:

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x < 2 \\ 1, & 2 < x < 5 \\ x, & 5 < x < 8 \\ \frac{x^2}{10}, & x > 8 \end{cases} \quad \text{أ) أكتب الدالة: بدلالة الدالة الدرجية.}$$

$$\text{ب) باستعمال محاولة لابلاس أوجد حل المسألة: } y' + y = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi \\ 3\cos x, & x \geq \pi \end{cases} \text{ حيث } y(0) = 0$$

$$\text{ج) إذا كان: } \begin{cases} y'' + xy = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

فأثبت أن: $Y'(s) = s^2 Y(s) - s$ ثم أوجد $y(x)$