Kingdom of Saudi Arabia Ministry of Higher Education KING SAUD UNIVERSITY *Deanship of Scientific Research* *College of Science Research Center*		المملكة العربية السعودية وزارة التعليم العالي جامعة الملك سعود عمادة البحث العلمي مركز بحوث كلية العلوم

الإختبار الأول للفصل الأول (1429-1430) للمقرر 316

السؤال الأول:

أ) لتكن $(\psi_n)_{n\in N}$ مجموعة متعامدة في فضاء الدوال $L^2(a,b)$. متى نقول أنها تامة في $L^2(a,b)$.

ب) إذا كانت $f \in L^2(a,b)$ و $g \in L^2(a,b)$ فاثبت أن: $(f,g) \le \| f \| \| g \|$.

ج) إذا كان $f \in L^2(a,b)$, أوجد أفضل تقريب للدالة $f \in L^2(a,b)$ بالنسبة للقياس في $L^2(a,b)$ بدلالة تركيب خطي من عناصر المجموعة $(\psi_n)_{n\in N}$.

السؤال الثاني:

ضع المعادلة التالية على شكل معادلة شتورم ليوفيل:

أ) $(x-x^2)y'' - 2xy' + y = 0, \ \ 0 < x < 1$

ب) هل يمكن تحديد أو إيجاد حل على شكل متسلسلة قوى بجوار $x_0 = 0$ للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + y'\sin x + (1+x^2)y = 0$$

ج) لتكن لدينا المسالة الحدية:

$$\begin{cases} (e^x u')' + xu + \lambda u = 0 \\ u(1) = 0, \ \ u(2) = 0 \end{cases}$$

أثبت أن:

$$\lambda \int_1^2 e^x (u')^2 dx = \int_1^2 (\lambda + x) u^2 dx$$

السؤال الثالث:

أ) أوجد القيم الذاتية والدوال الذاتية للمسألة الحدية:

$$\begin{cases} (xu')' + \frac{\lambda}{x} u = 0, & 1 < x < e \\ u(1) = 0, \ \ u(e) = 0. \end{cases}$$

ب) لتكن لدينا المعادلة التفاضلية: $x^2(x+2)y'' - xy' + (x+1)y = 0, \ \ x > 0.$

حدد نوعية النقطة $x = 0$ ثم أوجد الحل على شكل متسلسلة قوى بجوار $x = 0$.

Kingdom of Saudi Arabia		المملكة العربية السعودية
Ministry of Higher Education		وزارة التعليم العالي
KING SAUD UNIVERSITY		جامعة الملك سعود
Deanship of Scientific Research		عمادة البحث العلمي
College of Science Research Center		مركز بحوث كلية العلوم

الإختبار الثاني للفصل الأول (1429-1430) للمقرر 316

السؤال الأول:

أ) إذا كان $x \in \mathbb{R} , t \in \mathbb{R}$ فبرهن أن: $e^{2tx-t^2} = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} H_n(x) t^n$ حيث $H_n(x)$ هي كثيرات حدود هارميت.
(و الطرف الأيسر هو الدالة المولدة لكثيرات حدود هارميت).

ب) لتكن $P_n(x)$ كثيرات حدود لوجوندر المتعامدة على [-1,1]. أوجد منشور الدالة: $f(x) = 1 - x^3, -1 < x < 1$ بدلالة كثيرات حدود لوجوندر $P_n(x)$.

السؤال الثاني:

أ) أوجد مفكوك فوريير للدالة: $f(x) = x^2,\ \pi < x < -\pi$ حيث $f(x + 2\pi) = f(x)$ ثم استنتج مجموع المتسلسلتين: $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}$

ب) أي من المعادلات تحققها كثيرات حدود لوجوندر: $i)\ xP_n' - nP_n = -P_n'$ $\quad 2i)\ xP_n' - nP_n = P_n'$
$3i)\ nP_n' - xP_n = -P_{n-1}'$ $\quad 4i)\ xP_n' - P_n = -P_{n-1}'$

السؤال الثالث:

أ) أوجد تكامل فوريير للدالة f المعرفة كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

و استنتج أن:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\pi\xi) + \xi \sin(\pi\xi) d\xi}{1+\xi^2} = \pi e^{-\pi}$$

ب) لتكن الدالة f المعرفة على الفترة $(-\pi, \pi)$ كالتالي: $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & -\pi < x < -a,\ a < x < \pi \end{cases}$
أوجد الشكل المركب لمتسلسلة فوريير وبين أنه يكافئ الشكل المثلثي.

Kingdom of Saudi Arabia Ministry of Higher Education KING SAUD UNIVERSITY *Deanship of Scientific Research* *College of Science Research Center*		المملكة العربية السعودية وزارة التعليم العالي جامعة الملك سعود عمادة البحث العلمي مركز بحوث كلية العلوم

الإختبار النهائي للفصل الأول (1429-1430) للمقرر 316

السؤال الأول:

أ) ماذا نعني بمسألة شتورم ليوفيل, وماهي أنواعها؟

ب) لتكن لدينا مسألة شتورم ليوفيل التالية: $(*)\begin{cases}(ru')' + p(x)u + \lambda u = 0\\ u'(a) - \alpha u(a) = 0\\ u'(b) - \beta u(b) = 0\end{cases}$ حيث: $\alpha \leq 0, \beta \geq 0$

إذا كانت u تحقق المسألة (*), فاثبت أن:

$$\lambda \int_a^b f^2 dx - \int_a^b r f'^2 dx = -\int_a^b p(x) f^2 dx + \beta r(b) f^2(b) - \alpha r(a) f^2(a)$$

ج) إذا كان $p(x) \leq C$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$, فاثبت أن جميع القيم الذاتية للمسألة (*) تحقق $\lambda \geq -C$.

السؤال الثاني:

أ) أثبت أن: $xJ_\nu'(x) + J_\nu(x) = xJ_{\nu-1}(x)$

ب) استخدم أ) للبرهان على أن: $\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$

ج) من السؤال ب) استنتج أن: $\int_0^x r J_0(r) dr = xJ_1(x)$

السؤال الثالث:

لتكن لدينا المسالة الحدية: $\begin{cases} u'' + \lambda u = 0\\ u(0) = 0,\ u(\pi) = 0\end{cases}$

أ) أوجد الدوال الذاتية التي تحقق $\int_0^\pi u_n^2 dx = 1$

ب) إذا عوض الشرط: $u(0) = 0$ بالشرط: $u'(0) = 0$ فاوجد الدوال الذاتية المتعامدة على $[0, \pi]$.

السؤال الرابع:

أ) أوجد تكامل فورييه للدالة f المعرفة كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases}|sinx|, & |x| \leq \pi\\ 0, & |x| > \pi\end{cases} \quad \text{حيث أن:} \quad f(x + \pi) = f(x)$$

و استنتج أن: $\int_0^\infty \frac{\cos(\pi\xi)+1}{1-\xi^2} \cos(\pi\xi) d\xi = \frac{\pi}{2}$

ب) باستعمال طريقة فروبينيوس أوجد الحل العام للمعادلة: $3xy'' + (2 - x)y' - y = 0$

السؤال الخامس:

أ) أكتب الدالة: $f(x) = \begin{cases} 3, & x < 2 \\ 1, & 2 < x < 5 \\ x, & 5 < x < 8 \\ \frac{x^2}{10}, & x > 8 \end{cases}$ بدلالة الدالة الدرجية.

ب) باستعمال محولة لابلاس أوجد حل المسألة: $y' + y = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi \\ 3cosx, & x \geq \pi \end{cases}$ حيث $y(0) = 0$

ج) إذا كان: $\begin{cases} y'' + xy = 0 \\ y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0 \end{cases}$

فاثبت أن: $Y'(s) = s^2Y(s) - s$ ثم أوجد $y(x)$