Kingdom of Saudi Arabia Ministry of Higher Education KING SAUD UNIVERSITY *Deanship of Scientific Research* *College of Science Research Center*		المملكة العربية السعودية وزارة التعليم العالي جامعة الملك سعود عمادة البحث العلمي مركز بحوث كلية العلوم

الإختبار الأول للفصل الأول (1430-1431) للمقرر 316

المدة: ساعة ونصف- 1430/11/22

السؤال الأول:

أ) إذا كانت $f \in L^2(a,b)$ و $g \in L^2(a,b)$ فاثبت أن: $(f,g) \leq \| f \| \| g \|$.

ب) أثبت أن المجموعة $\{1, x, |x|\}$ مستقلة خطيا في $C([-1,1])$ ثم استخرج منها مجموعة متعامدة باستخدام طريقة قرام-شميدت.

السؤال الثاني:

ضع المعادلات التالية على شكل معادلة شتورم ليوفيل وعين دالة الثقل فيها

أ) $(cosx)u'' + (sinx)u' - (cosx)^2 u = 0, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

ب) $u'' - xu' = 0$ $\quad + \lambda u$

$+ \lambda u$

السؤال الثالث:

لتكن لدينا المسألة الحدية:
$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \\ u(-2) = u(2), \quad u'(-2) = u'(2). \end{cases}$$

أ) هل أن هذه المسألة هي مسالة لشتورم ليوفيل.

ب) أوجد القيم الذاتية و الدوال الذاتية لهذه المسألة.

ج) ما هي الدوال الذاتية $u_n(x)$ التي تحقق العلاقة $\int_0^{\pi} u_n^2(x)dx = 1$

(١) .

تصحيح الاختبار الأول
الفصل الأول ١٤٣٠/١٤٣١

السؤال الأول: أ) $f \in L^2(a,b)$ ، $g \in L^2(a,b)$ فإن $\langle f, g\rangle \le \|f\|\|g\|$

لدينا:

$$\left\|\frac{|f|}{\|f\|}-\frac{|g|}{\|g\|}\right\|^2=\int_a^b\left(\frac{|f|}{\|f\|}-\frac{|g|}{\|g\|}\right)^2dx\ge 0$$

حيث $\|f\|\ne 0$ ، $\|g\|\ne 0$

ومنه فإن:

$$\int_a^b\frac{|f|}{\|f\|}\cdot\frac{|g|}{\|g\|}dx\le\frac{1}{2}\int_a^b\frac{|f|^2}{\|f\|^2}dx+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{|g|^2}{\|g\|^2}dx=1$$

أي أن

$$\langle f,g\rangle\le\langle |f|,|g|\rangle$$
$$\le\|f\|\cdot\|g\|.$$

ب) لدينا

$$c_1+c_2x+c_3|x|=0 \longrightarrow (*)$$

$x=0 \Leftarrow$ $\quad c_1=0 \longrightarrow (1)$

$x=1 \Leftarrow$ $\quad c_1+c_2+c_3=0 \longrightarrow (2)$

$x=-1 \Leftarrow$ $\quad c_1-c_2-c_3=0 \longrightarrow (3)$

من المعادلات (1) ، (2) ، (3) نستنتج أن $c_1=c_2=c_3=0$

حيث أن (*) محققة فقط من أجل $c_3=c_1=c_2=0$

وبالتالي فالدوال $|x|$ ، x ، 1 مستقلة خطياً على $[-1,1]$

باستخدام طريقة "جرام-شميدت" يمكننا استخراج مجموعة متعامدة $\{v_1, v_2, v_3\}$

نضع $v_1=u_1=1$

$$v_2=u_2-\frac{\langle u_2,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1=x-\frac{\langle x,1\rangle}{\|1\|^2}=x-\frac{\int_{-1}^1x\,dx}{\int_{-1}^1dx}=$$

$$= x - \frac{0}{2} = x.$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

$$= |x| - \frac{\int_{-1}^{1}|x|}{\int_{-1}^{1}dx} - \frac{\int_{-1}^{1}|x|.x}{\int_{-1}^{1}x^2dx}.x = |x| - \frac{1}{2}.$$

وبالتالي فالمجموعة المتعامدة على $[-1,1]$ هي

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \{1, x, |x| - \tfrac{1}{2}\}$$

السؤال الثاني: أ)

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$p(x) = e^{-\ln \cos x} = e^{\ln \frac{1}{\cos x}} = \frac{1}{\cos x} \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\mu(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

نضرب طرفي المعادلة:

$$(\cos x)u'' + (\sin x)u' - (\cos^3 x)u + \lambda u = 0$$

بالدالة $\mu(x)$:

$$\frac{1}{\cos x}u'' + \frac{\sin x}{\cos^2 x}u' - u + \frac{\lambda u}{\cos^2 x} = 0$$

أي أن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}u'\right) - u + \frac{\lambda u}{\cos^2 x} = 0$$

دالة الثقل: $W(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

أما بالنسبة للمعادلة $u'' - xu' + \lambda u = 0$ فإن

$$\mu(x) = \frac{1}{1}e^{\int -x\,dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

نضرب طرفي المعادلة في $\mu(x)$ فنجد أن:

$$e^{-x^2/2}u'' - xe^{-x^2/2}u' + \lambda u e^{-x^2/2} = 0$$

(3)

أي أن :
$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}u'\right)+\lambda u e^{-\frac{x^2}{2}}=0$$

دالة الثقل هي : $W(x)=e^{-x^2/2}$

<u>السؤال الثالث</u> :
$$\begin{cases} u''+\lambda u=0 \\ u(-2)=u(2) \\ u'(-2)=u'(2) \end{cases}$$

أ) هذه ليست مسألة لشتورم - ليوفيل لأن الشروط الحدية شروط دورية، وليست شروط شتورم ليوفيل.

ب) المعادلة المميزة هي $m^2+\lambda=0 \Leftarrow m_{1,2}=\pm i\sqrt{\lambda}$

$$u(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$$

$$u(2)=u(-2) \Leftrightarrow 2B\sin 2\sqrt{\lambda}=0$$

إذا كان $B=0$ فإن $u(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x$

ومنه فإن $u'=-\sqrt{\lambda}A\sin\sqrt{\lambda}x$

والشرط $u'(2)=u'(-2)$ يعطي :

$$-\sqrt{\lambda}A\sin 2\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}A\sin 2\sqrt{\lambda}=0$$

لذلك فإن $B\neq 0$ ومنه فإن

$$\sin 2\sqrt{\lambda}=0 \Rightarrow =n\pi$$

أي أن $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \quad , \quad n\geq 1$

وهي القيم الذاتية وبالتالي فإن الدوال الذاتية المرتبطة بها هي

$$U_n(x)=\left\{C_n\cos\frac{n\pi}{2}x\right\}_{n\geq 1}$$

إذا كان $\lambda=0$ فإن $u''=0 \Leftarrow$

$$u(x)=c_1+c_2x$$

ومن الشروط الدورية لا نحصل إلا على الحل التافه $u=0$.

(4)

$$\int_{-2}^{2} C_n^2 \cos^2 \frac{n\pi}{2} x \, dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad C_n^2 \int_{-2}^{2} \frac{1-\cos n\pi x}{2} \, dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{C_n^2}{2}\left[x\Big|_{-2}^{2} - \underbrace{\cancel{\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x}\Big|_{-2}^{2}}_{0} \right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2C_n^2 = 1 \Rightarrow C_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

المتتالية المطلوب هي

وبالتالي فان الدوال ،

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{n\pi x}{2} \right\}_{n \geq 1}$$