Kingdom of Saudi Arabia Ministry of Higher Education KING SAUD UNIVERSITY *Deanship of Scientific Research* *College of Science Research Center*	King Saud University ١٣٧٧ 1957 جامعة الملك سعود	المملكة العربية السعودية وزارة التعليم العالي جامعة الملك سعود عمادة البحث العلمي مركز بحوث كلية العلوم

الإختبار الأول للفصل الثاني (1429-1430) للمقرر 316

المدة: ساعة ونصف- 1430/04/19

السؤال الأول:

1 أ) اعط الشرط اللازم والكافي لكي تكون المجموعة المتعامدة $(\psi_n)_{n\in N}$ في فضاء الدوال $L^2(a,b)$ تامة.

2 ب) إذا كانت $f \in L^2(a,b)$ و $g \in L^2(a,b)$ فأثبت أن: $(f,g) \leq \| f \| \| g \|$.

(4) ج) عين المعاملات: a_i حيث : $i = 1,2,..5$ في الدالة:

$a_1 + a_2 sinx + a_3 cosx + a_4 sin2x + a_5 cos2x$ للحصول على أفضل تقريب في $L^2(-\pi,\pi)$ للدالة:

$$f(x) = |x|$$

السؤال الثاني:

2 أ) ضع المعادلة التالية على شكل معادلة شتورم ليوفيل وعين دالة الثقل فيها

$$(sinx)u'' + (cosx)u' + \lambda sinx u = 0.$$

ب) ليكن لدينا المؤثر: $L = \frac{d^2}{dx^2} + 6\frac{d}{dx} + 9$

1 1. بين أن: $L(e^{rx}) = (r+x)^2 e^{rx}$

2 2. مستعملا أ أوجد حلول: $Lu = 0$

2 3. إذا كان Z يتعلق بالمتغيرين r, x فبين أن: $\frac{\partial}{\partial r}L(Z) = L(\frac{\partial Z}{\partial r})$

السؤال الثالث.

لتكن لدينا المسألة الحدية:

$$\begin{cases} x^2u'' + 2xu' + \lambda u = 0, \\ u(1) = 0, \quad u(b) = 0, \quad b > 1 \end{cases}$$

1 أ) بين أن هذه المسألة هي مسألة لشتورم ليوفيل.

6 ب) أوجد القيم الذاتية و الدوال الذاتية لهذه المسألة.

(1)

تصحيح الاختبار الأول

٣١٦ ريض - الفصل الثاني ١٤٢٩ - ١٤٣٠

إجابة السؤال الأول

م) لكي تكون المجموعة المتعامدة $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(a,b)$ تامة، يجب أن تتحقق معادلة (مساواة) Parseval

(1) أي لكل $f \in L^2(a,b)$، لدينا

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle f, \varphi_n\rangle|^2}{\|\varphi_n\|^2}.$$

ب) إذا كانت $f \in L^2(a,b)$ ، $g \in L^2(a,b)$ فإن

$$(f,g)_{L^2(a,b)} \le \|f\| \cdot \|g\|$$ (2)

لقد تم البرهان عن هذا الشق من السؤال في المحاضرة.
(انظر المحاضرة)

جـ)

$$f(x) = |x| = a_1 + a_2 \sin x + a_3 \cos x + a_4 \sin 2x + a_5 \cos 2x$$

نحصل الحصول على المعاملات a_i ، $i=\overline{1,5}$ من خلال: (4)

$$a_i = \frac{\langle f, \varphi_i\rangle}{\|\varphi_i\|^2} \qquad i=\overline{1,5}$$

حيث $\varphi_1(x)=1$ ، $\varphi_2(x)=\sin x$ ، $\varphi_3(x)=\cos x$ ، $\varphi_4(x)=\sin 2x$

$\varphi_5(x)=\cos 2x$

ومن ثم فإن:

$$|x| = \sum_{i=1}^{5} a_i \varphi_i(x)$$

لدينا:

$$\|\varphi_1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

$$\|\varphi_2\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \pi$$

$$\|\varphi_3\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx = \pi$$

$$\|\varphi_4\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx = \pi$$

$$\|\varphi_5\|^2 = \pi$$

$$\langle f,\varphi_1\rangle = \langle |x|, 1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \pi^2$$

$$\langle f,\varphi_2\rangle = \langle |x|, \sin x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin x\,dx = 0$$ (لأن $|x|\sin x$ فردية)

$$\langle f,\varphi_3\rangle = \langle |x|, \cos x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos x\,dx = 2\int_{0}^{\pi} x \cos x = -4$$

$$\langle f,\varphi_4\rangle = \langle |x|, \sin 2x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin 2x\,dx = 0$$ (لأن $|x|\sin 2x$ فردية)

$$\langle f,\varphi_5\rangle = \langle |x|, \cos 2x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos 2x\,dx = 2\int_{0}^{\pi} x \cos 2x = 0$$

وبالتالي فإن:

$$|x| = a_1\varphi_1 + \dots + a_5\varphi_5$$
$$= \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{4}{\pi}\cos x + 0 + 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x$$

$$a_1 = \frac{\pi}{2},\quad a_2 = 0,\quad a_3 = -\frac{4}{\pi},\quad a_4 = 0,\quad a_5 = 0$$

إجابة السؤال الثاني: ا) لنضع المعادلة:

$$(\sin x)u'' + (\cos x)u' + \lambda(\sin x)u = 0$$

على شكل معادلة Sturm-Liouville

$$\mu(x) = \frac{1}{\sin x} e^{\int \frac{\cos x}{\sin x}dx} = \frac{1}{\sin x} e^{\ln|\sin x|} = 1,$$

المعادلة هي:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin x \frac{du}{dx}\right) + \lambda \sin x\, u = 0$$

ودالة الثقل هي $w(x) = \sin x$

ب) -1
$$L(e^{rx}) = (e^{rx})'' + 6(e^{rx})' + 9e^{rx}$$
$$= r^2 e^{rx} + 6re^{rx} + 9e^{rx}$$
$$= (r+3)^2 e^{rx}$$

-2 حلول المعادلة $Lu=0$ هي $u_1 = e^{-3x}$

$u_2 = xe^{-3x}$

باختيار أن المعادلة المميزة لها جذر مضاعف $r=-3$

$$\frac{\partial}{\partial r} L(z) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 6\frac{\partial z}{\partial x} + 9z\right] \quad -3 \qquad 3$$

$$= \frac{\partial^3 z}{\partial r \partial x^2} + 6\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial x} + 9\frac{\partial z}{\partial r} = L\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) \qquad 2$$

إجابة السؤال الثالث :

$$\begin{cases} x^2 u'' + 2x u' + \lambda u = 0 \\ u(1) = 0, \quad u(b) = 0, \quad b > 1 \end{cases}$$

بما أن المعادلة تأخذ الشكل : $\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{du}{dx}\right) + \lambda u = 0$

شكل معادلة شتورم - ليوفيل 1

و المعاملات هي

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0$$

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 0$$

وبالتالي فالمسألة المدروسة هي مسألة شتورم - ليوفيل .

إيجاد القيم الذاتية و الدوال الذاتية :

باعتبار أن المعادلة هي معادلة كوشي أولر فإن :

$y = x^m$ حل .

$$y' = m x^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

المعادلة المميزة : $m^2 + m + \lambda = 0$

$$\Delta = 1 - 4\lambda$$

$$\sqrt{\Delta} = i\sqrt{4\lambda - 1}$$

$$m_1 = \frac{-1 + i\sqrt{4\lambda-1}}{2}, \quad m_2 = \frac{-1 - i\sqrt{4\lambda-1}}{2}$$

$$u = C_1 x^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\ln x\right) + C_2 x^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\ln x\right) \qquad 2$$

$$u(1) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$$

$$u(x) = C_2 x^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\ln x\right)$$

$$u(b) = 0 \Rightarrow C_2 b^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\ln b\right) = 0 \qquad b > 1$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\ln b\right) = 0$$

$C_2 = 0$ يعطينا الحل التافه

وبالتالي فإن : $\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\ln b = n\pi \qquad n = 1, 2, \ldots$

$$\Longleftrightarrow \quad 4\lambda - 1 = \frac{4n^2\pi^2}{(\ln b)^2}$$ (2)

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{(\ln b)^2} + \frac{1}{4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

وهي القيم الذاتية للمسألة المدروسة

والدوال الذاتية هي :

$$\{u_n(x)\}_{n\geq 1} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda_n - 1}}{2} \ln x \right) \right\}_{n \geq 1}$$ (2)

حيث $$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{(\ln b)^2} + \frac{1}{4}$$