الحل

كويز ١- مقرر ٣١٦ ريض- فصل١--١٤٤١هـ. أ. فواز بن سعود العتيبي

جامعة الملك سعود King Saud University

اسم الطالب:

الرقم الجامعي:

$\frac{}{5}$

لدينا المسألة:

$$y'' + 8y' + (\lambda + 16)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

(i) أكتب المعادلة في شكل معادلة شتورم- ليوفيل.

(ii) أوجد القيم الذاتية.

(iii) أوجد الدوال الذاتية وأثبت تعامدها.

الحلول:

(i) $S(x) = e^{\int 8dx} = e^{8x}$

نضربها بالمعادلة الأصلية:

$$e^{8x} y'' + 8e^{8x} y' + (\lambda+16)\cdot e^{8x} \cdot y = 0$$

هذه معادلة شتورم- ليوفيل. دالة الثقل: $r(x) = e^{8x}$

(ii) لإيجاد القيم الذاتية نحل المعادلة التفاضلية:

$$y'' + 8y' + (\lambda+16)y = 0$$

المعادلة المساعدة: $m^2 + 8m + (\lambda+16) = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4(\lambda+16) = -4\lambda$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{-4\lambda}}{2} = -4 \pm \sqrt{\lambda}\, i$$

$$y = e^{-4x} \cdot e^{\sqrt{\lambda} i x} = e^{-4x}\left[c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x\right]$$

$y(0) = 0 \rightarrow 0 = c_1$

$y(\pi) = 0 \rightarrow 0 = c_2 e^{-4\pi} \sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) \Rightarrow c_2 = 0$ مرفوضة لأننا لن نحصل على الحل التافه

$\Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\,\pi = n\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n \Rightarrow \lambda = n^2$

القيم الذاتية هي $(n \in \mathbb{N})$. لاحظ أن: $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$

(iii) الدوال الذاتية هي: $\left\{ e^{-4x} \sin(nx) \right\}$

لإثبات التعامد نحسب: $(m \neq n,\ m, n \in \mathbb{N})$

$$\langle e^{-4x} \sin(nx), e^{-4x} \sin(mx) \rangle =$$

$$= \int_0^{\pi} e^{-8x} \cdot \frac{\cos(nx-mx) - \cos(nx+mx)}{2} \cdot e^{+8x}\, dx$$

$r(x)$ دالة الثقل

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x - \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 - 0 - (0-0)\right] = 0$$