قسـم الرياضـيات	**316 ريـض**	**الفصـل الأول**
جامعة الملك سعود	**الاختبار النهائي**	**2011-1010**

1- حـدد المعـاملات a، b لكـي تصـبح الدالـة $f(x)=ae^{x}+be^{-x}$ عمودية على $g(x)=x$ في $\mathcal{L}^2(-1,1)$ وتحقق $\|f\|=1$.

2- (أ) أوجد منشور فورييه للدالة $f(x)=x+1$ على الفترة $[-1,1]$.

(ب) هل التقارب منتظم؟ ولماذا؟

3- أثبت أن $e^{-x/2}=2\sum_{n=0}^{\infty}3^{-n-1}L_n(x)$، حيث L_n كثيرة حدود لاقير المعرّفة بالصيغة

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}e^{x}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right),\quad 0\le x<\infty.$$

إرشاد: أثبت أولا أن

$$\left\langle e^{-x/2},L_n\right\rangle=\int_0^{\infty}e^{-x/2}L_n(x)e^{-x}dx=\frac{1}{n!2^n}\int_0^{\infty}x^n e^{-3x/2}dx,$$

$$\int_0^{\infty}x^n e^{-3x/2}dx=n!(2/3)^{n+1}.$$

4- استخدم التعويض $y(x)=x^{-1/2}u(x)$ لتحويل معادلة بيسل $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$ إلى الصيغة $u''+u=0$، ومن ثم استنتج الحل العام لمعادلة بيسل المعطاة.

5- أثبت أن $J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ لكل $x>0$، ومن ثم عيّن أصفار الدالة $J_{-1/2}$ وارسم الشكل البياني لهذه الدالة.

6- (أ) مثّل الدالة

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|<\pi,\\ 0, & |x|>\pi,\end{cases}$$

بتكامل فورييه بالصيغة المثلثية.

(ب) استنتج من (أ) أن

$$\pi=2\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi\xi\sin\frac{\pi}{2}\xi}{1-\xi^2}d\xi.$$