

1- عيّن الدوال التي تنتمي إلى $\mathcal{L}^2(0, \infty)$ من بين الدوال التالية:

$$(i) e^{-x} \quad (ii) \sin x \quad (iii) \frac{1}{1+x}.$$

متى تتحقق المساواة $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$ في \mathcal{L}^2 ؟

2- أين تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ متقاربة وأين تكون متباعدة على خط الأعداد الحقيقية \mathbb{R} ؟ ما قيمتها عندما $x = 1$ ؟

3- باعتبار $L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + r$ أثبت المتطابقة

$$uLv - vLu = [p(uv' - vu')].$$

استنتج من ذلك شرط اقتتان L الذاتي على الفترة (a, b) .

4- أوجد القيم والدوال الذاتية للمؤثر $L = \frac{d^2}{dx^2} - 1$ على الفترة $(0, 1)$ بحل المعادلة

$$Lu + \lambda u = 0$$

تحت الشروط الحدية

$$u(0) = u(1) = 0.$$

5- (i) أوجد مفكوك فورييه للدالة $f(x) = \pi - |x|$ على الفترة $[-\pi, \pi]$. هل التقارب منتظم، ولماذا؟

(ii) استنتج من ذلك مفكوك العدد π .