بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الاختبار النهائي في المقرر ٣٤٣ ريض
الفصل الدراسي الأول ١٤٢٩/١٤٣٠ هـ
الزمن : ثلاث ساعات

<u>أجب عن الأسئلة الآتية</u>

السؤال الأول :

إذا كانت $g = (g_1, g_2, g_3) \in G = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{11}^{*} \times S_{12}$ **، حيث :**

$g_1 = 2$ ، $g_2 = 5$ وَ $g_3 = \sigma = (1,,2,3,4,5,6)(6,5,4,3)(7,9,11,12)(8,10)$

فأجب عما يلي :-

(أ) املأ الفراغات الآتية :-

$1)\,|g_1| = \cdots \quad 2)\,|g_2| = \cdots \quad 3)\,|\sigma| = \cdots \quad 4)\,|g| = \cdots \quad 5)\,e = \cdots$

$6)\,g^{-1} = \cdots \quad 7)\,\langle\sigma\rangle \cong \cdots \quad 8)\,\langle g\rangle \cong \cdots \quad 9)\,Aut\,(\langle 9\rangle) \cong \cdots \quad 10)\,\sigma \ldots \mathbb{A}_{12}$

$11)\,|N_{S_{12}}(\sigma)| = \cdots$ $\quad 12)\,$ عدد مرافقات σ $= C_\sigma = \cdots$

(ب) أثبت صحة أوْ خطأ كل عبارة فيما يأتي :

١) يوجد تشاكل $\varphi : S_{12} \to S_{12}$ **، حيث** $\varphi(\alpha) = \alpha^{-1}$.

٢) لا يوجد $\mu \in S_{12}$ **، حيث** $|\mu| = 52$.

٣) توجد زمرة جزئية في G **رتبتها** *125* .

٤) إن $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{11}^{*} \cong \mathbb{Z}_{80}$.

السؤال الثاني :

(أ) إذا عرفنا التماثل " $\cong$ **" على مجموعة من الزمر M فأثبت أنها علاقة تكافؤ في M .**

(ب) إذا عرفنا العلاقة " $\cong$ **" على** L **، حيث :**

$L = \{G :$ زمرة رتبتها 12 $G\}$ **، فجد ممثلات أصناف التكافؤ في** L **.**

(جـ) أثبت أن $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_n$ **، وذلك بتوظيف العبارة : " أي زمرتين دائريتين منتهيتين ولهما الرتبة نفسها فهما متماثلتان " .**

السؤال الثالث :

(أ) لتكن $\sigma_i \in G = S_4$ **هي ممثلات أصناف الترافق في G . أجب عما يأتي :**

١) أكمل الفراغات :

$\sigma_1 = (1)\,, \sigma_2 = (1,2)\,, \sigma_3 = (\ldots)\,, \sigma_4 = (\ldots)\,, \sigma_5 = (1,2,3,4)$

٢) عيّن جميع القيم $|N_G(\sigma_i)|$ **ومن ثم اكتب معادلة الفصل للزمرة G .**

(ب) إذا كانت G **زمرة بسيطة رتبتها** *168* **فأثبت أن** G **لا تملك زمرة جزئية** H **رتبتها** *28* **.**

(جـ) وظف فقرة (ب) في اثبات أن " عكس مبرهنة لاغرانج غير صحيحة " .

السؤال الرابع :

(أ) متى نقول إن الزمرة G **تؤثر على مجموعة** S **(** ${}^{G}|_{S}$ **) ؟**

(ب) إذا كانت G زمرة منتهية وكانت S زمر سيلو الجزئية من النوع P في G فأثبت أن :

١) ${}^{G}|_{S}$ **بالترافق**

٢) $|S| = s_p \mid |G|$

(جـ) أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة G رتبتها 36 .

بسم الله الرحمن الرحيم

إجابة أسئلة الاختبار النهائي في المقرر ٣٤٣ ريض – الفصل الأول ٢٩ / ١٤٣٠ هـ

إجابة السؤال الأول :

(أ) :

$1)|g_1|=4 \quad 2)|g_2|=5 \quad 3)|\sigma|=12 \quad 4)|g|=60 \quad 5)e=(0,1,(1))$

$6)g^{-1}=\left(6,9,\sigma^{-1}=(1,6,2)(7,12,11,9)(8,10)\underline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\right) \quad 7)\langle\sigma\rangle\cong\mathbb{Z}_{12}$

$8)\langle g\rangle\cong\mathbb{Z}_{60} \quad 9)Aut(\langle 9\rangle)\cong U_{60} \quad 10)\sigma\in\mathbb{A}_{12}$

$11)\left|N_{S_{12}}(\sigma)\right|=2^4\cdot 3^2$

$12)$ عدد مرافقات $\sigma = C_\sigma = \dfrac{12!}{2^4.3^2} = 2^5\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11 = 3326400$

(ب) :

١) **خطأ لأنه :**

$\forall \alpha,\beta\in S_{12}:\ \varphi(\alpha\beta)=(\alpha\beta)^{-1}=\beta^{-1}\alpha^{-1}\neq\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$.

٢) **صائب ، لأن :**

$|\mu|=52=4\cdot 13\nmid|S_{12}|=(12)!$.

٣) **صائب ، لأن :**

$125=5^3\,||G|$ **وهي زمرة سيلو من النوع 5 .**

٤) **عبارة خاطئة ، لأن :**

$\mathbb{Z}_{80}$ زمر دائرية في حين أن $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_{11}^*$ ليست دائرية .

إجابة السؤال الثاني :

(أ) :

بفرض $M=\{G:\ $ زمرة $G\}$ **وتعريف** " $\cong$ " **على** M **نجد أن :**

١) $\cong$ **انعكاسية لأن :** $\forall G\in M:\ \exists\, G\xrightarrow{I}G \Leftrightarrow G\cong G$

٢) $\cong$ **تناظرية لأن :** $G_1,G_2\in M\ni G_1\cong G_2\Rightarrow\exists G_1\xrightarrow[\text{تماثل}]{\varphi}G_2\Rightarrow\exists G_2\xrightarrow[\text{تماثل}]{\varphi^{-1}}G_1\Rightarrow G_2\cong G_1$

٣) $\cong$ **متعدية لأن :**

$G_1,G_2,G_3\in M\ni G_1\cong G_2\wedge G_2\cong G_3\Rightarrow\exists G_1\xrightarrow[\text{تماثل}]{\varphi_1}G_2\wedge G_2\xrightarrow[\text{تماثل}]{\varphi_2}G_3\Rightarrow\exists G_1\xrightarrow[\text{تماثل}]{\varphi_2\varphi_1}G_3\Rightarrow G_1\cong G_3$

ومن (١) و (٢) و (٣) تكون " $\cong$ " علاقة تكافؤ في M

(ب) :

$L=\{G:\ |G|=12\}$ **و** $\cong$ **معرفة على** L **فهي إذن علاقة تكافؤ في** L

وتكون ممثلات أصناف التكافؤ هي :

١) $\mathbb{Z}_{12}$ ٢) $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_6$ ٣) D_6 ٤) $\mathbb{A}_4$

٥) $T=\langle x,y: x^3=y^4=e\wedge y^{-1}xy=x^{-1}\rangle$

(ج) : بما أن $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\langle(1+n\mathbb{Z})\rangle$ ، **حيث** $|(1+n\mathbb{Z})|=n$ فإنها تماثل $\mathbb{Z}_n$.

بسم الله الرحمن الرحيم

إجابة السؤال الثالث :

(أ) :

١) $\sigma_3 = (1,2)(3,4)\,,\sigma_4 = (1,2,3)$

٢) $|N_G(\sigma_1)| = |G|\,,|N_G(\sigma_2)| = 4\,,|N_G(\sigma_3)| = 8\,,|N_G(\sigma_4)| = 3\,,|N_G(\sigma_5)| = 4$

مما سبق نجد أن معادلة الفصل لـ G هي :

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{|G|}{|N(\sigma_i)|} = 1+6+3+8+6 = 24 = |G| = |S_4|$$

(ب) : بفرض أن $H < G$ بحيث $|H| = 28$ فإن :

$$H < G \Rightarrow \exists\, S = \{Hx \mid x \in G\} \ni |S| = [H : G] = \frac{168}{28} = 6 \Rightarrow \exists\, A(S) \ni |A(S)| = 6!$$

ولما كانت $|G| \nmid 6!$ فإنه باستخدام اختبار الدليل نجد أن G تملك زمرة جزئية فعلية ناظمية غير تافهة محتواة في H .

وهذا تناقض مع المعطيات لا مخرج منه إلا بالتسليم بأن G لا تملك زمرة جزئية H رتبتها 28 .

(ج) إن عكس مبرهنة لاغرانج غير صحيح ، لأنه من الفقرة (ب) $28\,||G|$ في حين لا توجد زمرة جزئية في G رتبتها 28.

إجابة السؤال الرابع :

(أ) : تطبيق $G|_S \Leftrightarrow \exists * : S \times G \to S$ بحيث :

1) $xe = x, \forall x \in S \wedge e \in G$

2) $x(gh) = (xg)h, \forall\, x \in S \quad \wedge \quad g, h \in G$

(ب) :

١) $G|_S$ بالترافق ، حيث : $(H,g) * = H * g = g^{-1}Hg$ لأن :

1) $He = e^{-1}He = H, \forall\, H \in S \ \wedge \ e \in G$

2) $Hg_1g_2 = (g_1g_2)^{-1}H(g_1g_2) = g_2^{-1}(g_1^{-1}Hg_1)g_2 = g_2^{-1}(Hg_1)g_2, \forall\, H \in S \wedge g_1 , g_2 \in G$

٢) إذا كانت $G|_S$ بالترافق فمن مبرهنة سيلو الثانية تكون جميع زمر سيلو الجزئية من النوع P مترافقة في G وهذا يعني وجود مدار واحد فقط تحت تأثير G على S ، أي أنه :

$H \in S \Rightarrow H$ طول مدار $= |S| = s_p = [G : G_H] = [G : N_G(H)]$ (مبرهنة)

$\Rightarrow |S| = s_p\,||G|$ ـــ مبرهنة لاغرانج

(ج) : $|G| = 36 = 2^2 \cdot 3^2$

من مبرهنة سيلو الأولى توجد زمرة سيلو جزئية H في G من النوع 3 رتبتها 9

$$H < G \ni |H| = 9 \Rightarrow \exists\, S = \{Hx | x \in G\} \ni |S| = \frac{36}{9} = 4 \Rightarrow \exists\, A(S) \ni |A(S)| = 4! = 24$$

ولما كانت $|G| = 36 \nmid 24$. فمن مبرهنة "اختبار الدليل" توجد زمرة جزئية ناظمية غير تافهة في G ومحتواة في H وعليه تكون G غير بسيطة .
