بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود — الاختبار النهائي في المقرر ٣٤٣ ريض

قسم الرياضيات — الفصل الأول ١٤٣١/١٤٣٢هـ — الزمن: ٣ ساعات

س١: إذا كان $g=(g_1,g_2,g_3)\in G=U_{17}\times\mathbb{Z}_{12}\times S_{15}$ ، حيث: ٢٠

$g_1=4$ ؛ $g_2=4$ ؛ $g_3=(1,10,11,12,15)(2,4,5,14,15)(3,6,15,12,11,10)$

فأجب عما يأتي:

(أ) املء الفراغات الآتية:

① $[|g_1|,|g_2|,|g_3|]=[\boxed{\cdots},\boxed{\cdots},\boxed{\cdots}]$ ② $|g|=\boxed{\cdots}$ ③ $e=\boxed{\cdots}$

④ $g^{-1}=\boxed{\cdots}$ ⑤ $|U_{17}|=\boxed{\cdots}$ ⑥ $\langle g_3\rangle\cong\boxed{\cdots}$ ⑦ $g_3\ \boxed{\cdots}\ A_{15}$

⑧ $\langle g\rangle\cong\boxed{\cdots}$ ⑨ $Aut(\langle g\rangle)\cong\boxed{\cdots}$ ⑩ $|N(g_3)|=\boxed{\cdots}$

(ب) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي:

(١) إن $|g_3^4|=5$ (٢) $\exists\,\sigma,\tau\in S_{15}\ni\langle\sigma\rangle\cong\langle\tau\rangle\wedge\sigma\neq\tau$

(٣) إن $\langle g_3\rangle\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_5$ (٤) لا يوجد $\alpha\in S_{15}$ حيث $|\langle\alpha\rangle|=56$.

س٢: لتكن G زمرة . أجب عما يأتي: ١٢

(أ) أكمل الفراغ $Z(G)=\{\cdots|\cdots\}$ ، ثم أثبت أن $Z(G)\trianglelefteq G$ علماً بأن $Z(G)\le G$.

(ب) إذا كانت $N\trianglelefteq G$ وكان $\phi:G\longrightarrow G/N$ تطبيقاً، حيث $\phi(g)=Ng$ ،
فأثبت أن ϕ تشاكل غامر.

(جـ) إذا كانت $G=S_n$ ، حيث $n>2$ فأكمل الفراغات الآتية:

(١) $G_1=\{\sigma\in G|\cdots\}$ (٢) $2G=\{\cdots|\cdots\}$ (٣) إن $A_n=\{\cdots|\cdots\}$

(٤) عدد أصناف الترافق في S_n يساوي ... (٥) $\theta\in G\Rightarrow|J(\langle\theta\rangle)|=\cdots$

س٣: (أ) إذا كانت G منتهية و $H\le G$ وكان $p\,|\,|G|$ فمتى نقول إن H زمرة سيلو جزئية من النوع p ؟ ٨

(ب) إذا كانت G زمرة رتبتها 448 فأجب عما يأتي:

(١) عيّن رتبة H ، حيث H زمرة سيلو الجزئية في G من النوع 2 .

(٢) استخدم «اختبار الدليل» لإثبات أن G زمرة غير بسيطة.

س٤: (أ) متى نقول إن G هي حاصل الضرب المباشر الداخلي للزمر $G_1,G_2,\cdots,G_n$ ؟ ١٠

(ب) إذا كانت $T=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ فأجب عما يأتي:

[١] أكمل الفراغات الآتية:

(i) $\bar{G}_i=\{\cdots|\cdots\}$ (ii) $i\neq j\Rightarrow\bar{G}_i\cap\bar{G}_j=\{(\cdots)\}$

(iii) $g\in T\Rightarrow g^{-1}=(\cdots)$

[٢] أثبت أن $G_i\cong\bar{G}_i$ [٣] إذا كانت $|G_i|=t$ لكل i نجد رتبة T .

// تابع ... G زمرة

(أ) $Z(G) = \{x \in G \mid zx = xz\}$ ، $Z(G) \leq G$ ، $Z(G) \trianglelefteq G$

4 $\forall z \in G$

$\forall x \in Z(G) \Rightarrow zx = xz$ — من تعريف $z \in Z(G)$

$\Rightarrow x^{-1}(zx) = x^{-1}(xz)$ — أثرنا على الطرفين من اليسار بـ x^{-1}

$\Rightarrow x^{-1}zx = (x^{-1}x)z$ — خاصية التجميع في $Z(G)$ حيث $Z \leq G$

$\Rightarrow x^{-1}zx = ez$ — خاصية النظير

$\Rightarrow x^{-1}zx = z \in Z(G)$ — خاصية المحايد

$\Rightarrow Z(G) \trianglelefteq G$ — من تعريف الناظمية

(ب) $N \trianglelefteq G$ ، $\varphi: G \to G/N$ ، $\varphi(g) = Ng$

3 أولاً نثبت أنه تشاكل:

$\forall g, h \in G: \varphi(gh) = N(gh)$ — من تعريف φ

$= NgNh$ — لأن $N \trianglelefteq G$

$= \varphi(g)\,\varphi(h)$ — من تعريف φ

$\therefore \varphi$ تشاكل

ثانياً نثبت أنه φ غامر:

$\forall Ng \in G/N : \exists g \in G \ni \varphi(g) = Ng$

من أولاً وثانياً $\therefore \varphi$ تشاكل غامر

(ج) $G = S_n$ حيث $n > 2$

2 ① $G_1 = \{\sigma \in G \mid \cancel{\#}\sigma = 1\}$ 1

② صفر

③ $A_n = \{\sigma \in G \mid \sigma$ زوجية $\}$ 1

④ عدد أصناف الترافق في S_n يساوي $\sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{|N(G_i)|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|S_n|}{|N(G_i)|}$ ✗ صفر

⑤ صفر

$H < G \Rightarrow \exists S = \{Hx \mid x \in G\} \Rightarrow |S| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{448}{64} = 7 = [G:H]$

$\Rightarrow \exists A(S) \ni |A(S)| = [G:H]! = |S|! = 7!$

$\Rightarrow |G| \nmid |A(S)|$

س٢ //

(P) إذا كانت G منتهية و $H \leq G$ و ~~$P \mid |G|$ وكانت~~ و $|G| = p^n m$

و $|H| = p^n$ وكانت $p^{n+1} \nmid |G|$ فإن H زمرة سيلو جزئية من النوع P.

(ب) $|G| = 448$ ، $|G| = 448 = 2^6 \cdot 7$

(1) إن H زمرة سيلو الجزئية في G من النوع 2 ورتبتها $2^6 = 64$

(2) إثبات أن G زمرة غير بسيطة باستخدام اختبار الدليل

(أ) من مبرهنة سيلو الأولى يوجد زمرة ~~جزئية~~ سيلو جزئية من G ولتكن H من النوع 2 ورتبتها 64

$$\{e\} \neq H < G \Rightarrow \exists\, S = \{Hx \mid x \in G\} \ni |S| = [G:H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{448}{64} = 7$$

$$\Rightarrow \exists\, A(S) \ni |A(S)| = |S|! = [G:H]! = 7!$$

$$\Rightarrow |G| \nmid |A(S)| = [G:H]! = 7!$$

من تعميم مبرهنة كيلي فإنه يوجد تشاكل $\varphi : G \longrightarrow A(S)$ نواته $K = K_\varphi$

هي اكبر زمرة جزئية ناظمية في G ومحتواة في H

من المبرهنة الأولى للتماثل فإن:

$$G/K \cong \varphi(G) < A(S)$$

وبما أن $\varphi(G) < A(S)$ من مبرهنة لاغرانج فإن:

$$|\varphi(G)| \,\big|\, |A(S)|$$

الآن نفترض أن φ متباين ~~$\Leftrightarrow$~~ أي $\Leftrightarrow$ $K = \{e\}$ فيكون لدينا

$$G/K = G/\{e\} \cong \varphi(G) < A(S)$$

أي أنه $G \cong \varphi(G)$

بما أن $|\varphi(G)| \,\big|\, |A(S)|$ و $G \cong \varphi(G)$ فإن:

$$|G| \,\big|\, |A(S)|$$

وهذا تناقض ولا مخرج منه إلا بالتسليم بأن فرضنا خاطئ ونقيضه

هو الصواب $K \neq \{e\}$ ،، $K \triangleleft G$ ،،

$$\forall x \in G : x^{-1} H x = H \Rightarrow \{e\} \neq H \triangleleft G$$

$$\Rightarrow G \text{ غير بسيطة}$$

٤/٤

٤ //

(أ) نقول إن G هي حاصل الضرب المباشر الخارجي للزمر $G_1, G_2, \ldots, G_n$ إذا :

صحيح

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$$
$$e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$$
$$g = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \Rightarrow g^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots, g_n^{-1})$$

(ب) $T = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$

(i) $\overline{G_i} = \{(e_1, \ldots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \mid 1 \le i \le n\}$

$\in T$ $\quad g \in G_i$

(ii) $i \neq j \Rightarrow \overline{G_i} \cap \overline{G_j} = \{e\}$; $e = (e_1, \ldots, e_n)$

(iii) $g \in T \Rightarrow g^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots, g_n^{-1})$

(ج) $G_i \cong \overline{G_i}$

نعرف تطبيق $\varphi : G_i \longrightarrow \overline{G_i}$ حيث

$\varphi(g_i) = (e_1, \ldots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$; $\forall g_i \in G_i$; $(e_1, \ldots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \in \overline{G_i}$

(i) نثبت أن φ تشاكل

$g_i, h_i \in G_i \Rightarrow \varphi(g_i h_i) = (e_1, \ldots, e_{i-1}, g_i h_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$ ——— من تعريف φ

$= (e_1, \ldots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)(e_1, \ldots, e_{i-1}, h_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$

من تعريف العملية على $\overline{G_i}$ ———

$= \varphi(g_i)\varphi(h_i)$ ——— من تعريف φ

$\therefore$ φ تشاكل

(ii) نثبت أن φ متباين

$\forall g_i, h_i \in G_i \ni \varphi(g_i) = \varphi(h_i) \Rightarrow (e_1, \ldots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) = (e_1, \ldots, e_{i-1}, h_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$

من تعريف φ ———

ولكن من تساوي زوجين مرتبين فإن $g_i = h_i$ $\forall i$ $\therefore$ φ متباين

(iii) نثبت أن φ غامر :

$\forall (e_1, \ldots, e_{i-1}, x_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \in \overline{G_i} : \exists x_i \in G_i \ni \varphi(x_i) = (e_1, \ldots, e_{i-1}, x_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$

لتكن $x_i = g_i$ فإن $\varphi(g_i) = (e_1, \ldots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$

$\therefore$ φ غامر

من (i), (ii), (iii) فإن $G_i \cong \overline{G_i}$

٢) $|G_i| = t$ لكل i

١) نسمي T —— $\therefore T = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$

لجميع i

. من تعريف —— $|T| = |G_1| \times |G_2| \times \dots \times |G_n|$

حيث $\forall i: |G_i| = t$ —— $\Rightarrow |T| = \underbrace{t \times t \times \dots \times t}_{n \text{ مرة}}$

~~$\Rightarrow |T| = nt$~~

$\Rightarrow |T| = t^n$

انتهى

بسم الله الرحمن الرحيم

س 1

$(g_1, g_2, g_3) = g \in G = U_{17} \times \mathbb{Z}_{12} \times S_{15}$

$g_1 = 4 \;,\; g_2 = 4 \;,\; g_3 = (1,10,11,12,15)(2,4,5,14,15)(3,6,15,12,11,10)$

أ) ٢) نكتب g_3 كحاصل ضرب دورات منفصلة

$g_3 = (1,3,6,15)(2,4,5,14,12)(7)(8)(9)(10)(11)(13)$ ✓

(أ)

① $[\,|g_1|, |g_2|, |g_3|\,] = [4, 3, 20]$ ✓ ٣ (11)

② $|g| = 60$ ✓ 1

③ $e = (e_1, e_2, e_3) \ni e_1 \in U_{17},\; e_2 \in \mathbb{Z}_{12},\; e_3 \in S_{15}$ 1

$= (1, 0, (1))$ ✓

④ $g^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1}, g_3^{-1}) = (13, 8, (15,6,3,1)(4,2,12,14,5))$ ✓ 1

⑤ $|U_{17}| = 16$ ✓ 1

⑥ $\langle g_3 \rangle \cong \mathbb{Z}_{20}$ ✓ 1

⑦ $g_3 \notin A_{15}$ ✓ 1

⑧ $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_{60}$ ✓ 1

⑨ $\mathrm{Aut}(\langle g_3 \rangle) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{20})$ ✗ صفر

⑩ $|N(g_3)| = 20$ ✗ صفر

$\cancel{|N(g_3)| = \frac{|G|}{|g_3|} = \frac{|S_{15}|}{|g_3|} = \frac{15!}{20} = 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 18 \cdot 14 \cdot 10}$

ب) ① إن $|g_3^4| = 5$ صائبة لأن ✓

$g_3^2 = (1,6)(3,15)(2,5,12,4,14)$ (٤) $1\frac{1}{2}$

$g_3^3 = (1,15,6,3)(2,14,4,12,5)$

$g_3^4 = (1)(3)(6)(15)(2,12,14,5,4) \Rightarrow |g_3^4| = 5 = \mathrm{l.c.m}\{1,5\}$ ✓

---

③ $\langle g_3 \rangle \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ صائبة لأن $\cong \mathbb{Z}_{20}$ $1\frac{3}{4}$

أولاً $|\langle g_3 \rangle| = |\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5| = 20$

كما أنه $\langle g_3 \rangle$ دائرية، كذلك كل من $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$ دائريتان

وبالتالي $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ دائرية $\Leftarrow$ $\therefore \langle g_3 \rangle \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ لأن $(4,5) = 1$

---

⑤ $\sigma \neq \tau$ و $\exists\, \sigma, \tau \in S_{15} \ni \langle \sigma \rangle \cong \langle \tau \rangle$ خاطئة لأن: بدليل

صفر لتكملة $\sigma = (1,3,6,15)(2,4,5,14,12) \in S_{15}$

~~$\tau = (2,4,5,14,12) \in S_{15}$~~ $\tau = (2,12,14,5,4) \in S_{15}$

$\sigma \neq \tau$

$\sigma \neq \tau$ ولكن $\langle \sigma \rangle \ncong \langle \tau \rangle$ لأن $|\sigma| \neq |\tau|$

$U_{17} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$

$|U_{17}| = 16$

$g_1 = 4 \Rightarrow 4^2 = 16 \cancel{4} = 1$

$\cancel{|g_1| = 2}$ $\quad 4^3 \equiv$ $\quad |g_1| = 4$

$g_2 = 4 \in \mathbb{Z}_{12}$

$4^2 = 8$

$4^3 = 12 / 12 = 0$

$|g_2| = 3$

$(4,5,1) = 20$

$$\cancel{|G_i| = \sum}$$

$$|G_i| = \sum \frac{|\hat{G}_i|}{|N|}$$

$$\sum \frac{|S_n|}{|N(G)|}$$