بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود / الرياض — الاختبار النهائي — في المقرر ٣٤٣ ريض
كلية العلوم / قسم الرياضيات — الفصل الدراسي الأول ١٤٣٥/١٤٣٤ هـ — الزمن : ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س١ : ليكن $G = S_{10} \times U_{16} \times \mathbb{Z}_{12}$ ، $g = (g_1, g_2, g_3) \in G$ ، حيث :
$g_1 = \sigma = (1,3,5,7)(2,6,8,10)(1,8,6,10)(3,7,5)$ ؛ $g_2 = 5$ ؛ $g_3 = 4$

أجب عما يأتي :-

(أ) املأ الفراغات الآتية :-

1 $|\sigma| = \ldots$ 2 $|g_2| = \ldots$ 3 $|g_3| = \ldots$ 4 $|g| = \ldots$ 5 $e = (\ldots\ldots)$
6 $g^{-1} = (\ldots\ldots)$ 7 $\langle \sigma \rangle \cong \ldots$ 8 $|U_{16}| = \ldots$ 9 $Aut(\langle g \rangle) \cong \ldots$
10 $\sigma \ldots A_{10}$ 11 $|G| = \ldots$ 12 $C_\sigma = \frac{|S_{10}|}{\ldots} = \ldots$ (عدد مرافقات σ)

(ب) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :-

(١) إن $U_{16} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (٢) إن G تملك عنصراً رتبته 11 .
(٣) توجد $\varphi \in S_{10}$ بحيث $|\varphi| = 30$ (٤) ليس توجد زمرة سيلوفرية في G رتبتها 125 .

س٢ : (أ) املأ الفراغات الآتية :-

(١) $Aut(G) = \{ \ldots | \ldots \}$ (٢) $\{ \ldots | \ldots \} = \mathfrak{I}(G)$.

(ب) إذا كانت G زمرة غير ابدالية فأثبت أن : $|Aut(G)| > 1$.

(ج) متى نقول إن G زمرة غير بسيطة ؟

(د) إذا كانت $H < G$ وكانت G منتهية ، فمتى نقول إن H زمرة سيلوفرية في G من النوع P ؟

(هـ) أثبت أنه ليس توجد زمرة بسيطة G رتبتها 72 .

س٣ : أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :-

(١) إذا كانت G_1 و G_2 زمرتين دائريتين بحيث $|G_1| = |G_2| = n$ فإن $G_1 \cong G_2$
(٢) توجد زمرة غير ابدالية رتبتها 1681 .
(٣) ليس يوجد تماثل غير التماثل الناتج من $\mathbb{Z}_{16}$ إلى $\mathbb{Z}_9$.
(٤) إن $A_4 \cong D_6$.

س٤ : (أ) متى نقول إن G زمرة حاصل الضرب المباشر الداخلي للزمر $K_1, \ldots, K_n$ ؟

(ب) أثبت أن $G \cong T$ ، حيث G زمرة حاصل الضرب المباشر الداخلي للزمر $K_1, \ldots, K_n$ و $T = K_1 \times \cdots \times K_n$.

تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح