بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود / الرياض — الاختبار النهائي — في المقرر ٣٤٣ ريض
كلية العلوم / قسم الرياضيات — الفصل الدراسي الأول ١٤٣٩/١٤٤٠ هـ — الزمن : ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س١ : إذا كانت $G = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{11}^* \times S_{12}$ ، $g = (g_1, g_2, g_3) \in G$ ، حيث

$g_1 = 2$ ، $g_2 = 5$ ، $g_3 = (1,2,3,4,5,6)(6,5,4,3)(7,9,11,12)(8,10) = \sigma$

فأجب عما يأتي :-

(أ) اكتب $g_3 = \sigma$ كحاصل ضرب تباديل منفصلة .

(ب) املأ الفراغات الآتية :

[1] $|g_1| = \cdots$ [2] $|g_2| = \cdots$ [3] $|\sigma| = \cdots$ [4] $|g| = \cdots$ [5] $e = \cdots$

[6] $g^{-1} = \cdots$ [7] $\langle \sigma \rangle \simeq \cdots$ [8] $\langle g \rangle \simeq \cdots$ [9] $Aut(\langle \sigma \rangle) \simeq \cdots$

[10] $\sigma \cdots A_{12}$ [11] $|N_{S_{12}}(\sigma)| = \cdots$ [12] عدد مرافقات $\sigma = C_\sigma = \cdots$

(جـ) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يلي :-

(١) لا يوجد تشاكل $\varphi : S_{12} \to S_{12}$ ، حيث $\varphi(h) = h^{-1}$.

(٢) يوجد $M \in S_{12}$ ، بحيث $|M| = 52$.

(٣) توجد زمرة جزئية في G رتبتها 125 .

(٤) إن $\mathbb{Z}_{11}^* \times \mathbb{Z}_8 \ncong \mathbb{Z}_{80}$.

س٢ : (أ) إذا عرفنا علاقة التماثل " $\simeq$ " على مجموعة L فأثبت أنها علاقة تكافؤ في L .

(ب) إذا عرفنا العلاقة " $\simeq$ " على M ، حيث :

$M = \{G \mid G$ رتبتها 8 $\}$ ، فأوجد عندئذ أصناف التكافؤ في M .

(جـ) أثبت أن : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$ ، بدون استخدام نظيق بينهما .

س٣ : (أ) متى نقول إن G تؤثر على المجموعة S ؟ $(|G| \nmid |S|)$.

(ب) إذا كانت G منتهية وكانت S مجموعة ممثلو الجزئية من النوع P في G فأثبت أن :

(١) S | G بالترافق (٢) $|S| = A_P \mid\mid G \mid$.

س٤ : (أ) إذا كانت G زمرة بسيطة رتبتها 360 فأثبت أن G لا تملك زمرة جزئية H رتبتها 72 .

(ب) وضح فقرة (أ) في إثبات أن عكس مبرهنة لاغرانج غير صحيح .

(جـ) إذا كانت G منتهية وكان $a, b \in G$ بحيث $|ab| = n$ فأثبت أن : $|ba| = n$ أيضا .