الفصل الثاني ١٤٢٩ / ١٤٣٠ هـ	بســم الله الرحمن الرحيم	جامعة الملك سعود / كلية العلوم
الزمن : ثلاث ساعات	الاختبار النهائي في المقـرر٣٤٣ ريض	قســــم الرياضيات

السؤال الأول : (٢٠ درجة)

إذا كانت $g=(g_1,g_2,g_3)\in G=U_{12}\times U_{14}\times S_{10}$ ، حيث :

$$g_1=7;\ g_2=3;\ g_3=(1,3,5,9)(2,10,8,6,4)(1,5,3,6,8)$$

فأجب عما يأتي :-

(أ) أملأ الفراغات الآتية:-

$(1)|g_1|=\ldots\ldots$ $(2)|g_2|=\ldots\ldots$ $(3)|g_3|=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(4)|g|=\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(5)U_n=\{x\in\mathbb{Z}_n|\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ $(6)U_{14}\cong\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(7)<g_3>\cong\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(8)<g>\cong\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(9)\ Aut<g>\cong\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(10)\ g_3\ldots\ldots\ldots\ldots\ \mathbb{A}_{10}$

$(11)\,g^{-1}=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(12)\{(1,1,\sigma)\in G|\sigma\in S_{10}\}\cong\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(13)\ |G|=\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(14)|N_{S_{10}}(g_3)|=\ldots\ldots\ldots\ldots$ (15) S_{10} في g_3 عدد مرافقات $=C_{g_3}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

(ب) أثبت صحة كل عبارة فيما يأتي :-

(١) إن $U_{12}\ncong\mathbb{Z}_4$. (٢) توجد زمرة جزئية في G رتبتها 25.

(٣) لا توجد زمرة جزئية في S_{10} رتبتها 243. (٤) إن " S_n زمرة غير بسيطة لكل $n\in\mathbb{Z}^+$ " تقرير خاطئ.

السؤال الثاني : (٩ درجات)

(أ) عرف زمرة التناوب $\mathbb{A}_n$.

(ب) أثبت أن : (١) $\mathbb{A}_n\trianglelefteq S_n$. (٢) $|\mathbb{A}_n|=\frac{n!}{2}$.

السؤال الثالث : (١٢ درجة)

(أ) أكتب نص كل من (١) تعميم مبرهنة كيلي . (٢) مبرهنة سيلو الأولى .

(ب) إذا كانت G زمرة منتهية و $p||G|$ فأثبت أن : -

$|\mathcal{L}|\equiv 1\ mod\ p$ ، حيث $\mathcal{L}$ مجموعة زمر سيلو الجزئية الأولية في G من النوع p.

(جـ) أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة G رتبتها 48، مستخدما النصين الواردين في الفقرة (أ).

السؤال الرابع : (٩ درجات)

أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :

(أ) إذا كانت G زمرة رتبتها 343 فإنه يوجد $e\neq y\in Z(G)$.

(ب) يوجد تشاكل غامر $\phi:\mathbb{Z}_{18}\to\mathbb{Z}_{14}$ نواته $k_\phi=<3>$.

(جـ) توجد زمرة G رتبتها 60 وتملك زمرتين جزئيتين A, B حيث $|A|=12$ و $|B|=10$ و $|A\cap B|=3$.

جامعة الملك سعود / كلية العلوم	بســم الله الرحمن الرحيم	الفصل الثاني ١٤٢٩ / ١٤٣٠ هـ
قســـــم الرياضيات	الاختبار النهائي في المقرر ٣٤٣ ريض (نموذج الإجابة)	الزمن : ثلاث ساعات

السؤال الأول : (٢٠ درجة)

إذا كانت $g=(g_1,g_2,g_3)\in G=U_{12}\times U_{14}\times S_{10}$ ، حيث :

$$g_1=7;\ \ g_2=3;\ \ g_3=(1,3,5,9)(2,10,8,6,4)(1,5,3,6,8)$$

فأجب عما يأتي :-

(أ) أملأ الفراغات الآتية:-

(1) $|g_1|=2$ (2) $|g_2|=6$ (3) $|g_3|=10$ (4) $|g|=30$

(5) $U_n=\{x\in \mathbb{Z}_n | (x,n)=1\}$ (6) $U_{14}\cong \mathbb{Z}_6$ (7) $<g_3>\cong \mathbb{Z}_{10}$

(8) $<g>\cong \mathbb{Z}_{30}$ (9) $Aut<g>\cong U_{30}$ (10) $g_3\notin \mathbb{A}_{10}$

(11) $g^{-1}=(7,5,(1,10,2,4,6)(5,9))$ (12) $\{(1,1,\sigma)\in G|\sigma\in S_{10}\}\cong S_{10}$ (13) $|G|=87091200$

(14) $|N_{S_{10}}(g_3)|=60$ (15) عدد مرافقات g_3 في S_{10} $=C_{g_3}=60480$

(ب) أثبت صحة كل عبارة فيما يأتي :-

(١) إن $U_{12}\not\cong \mathbb{Z}_4$ لان $U_{12}\cong \mathbb{Z}_2\times \mathbb{Z}_2$ وهذه زمرة غير دائرية.

(٢) هذه الزمرة الجزئية في G حسب مبرهنة سيلو الأولى ، لأن $|G|=2^{11}.3^5.5^2.7$.

(٣) لأن $|S_{10}| \nmid 3^5 =243$.

(٤) لأنه عندما يكون $n\in\{1,2\}$ فإن S_n زمرة بسيطة .

السؤال الثاني : (٩ درجات)

(أ) $\mathbb{A}_n=\{\sigma\in S_n|\ \sigma$ تبديلة زوجية $\}$.

(ب) بفرض أن $\phi:S_n\to(\{1,-1\},\cdot)$ تطبيق ، حيث :

$$\phi(\sigma)=\begin{cases}1 & \sigma \text{ زوجية} \\ -1 & \sigma \text{ فردية}\end{cases}$$

نجد أن ϕ تشاكل غامر نواته $k_\phi=\mathbb{A}_n\trianglelefteq S_n$ ويكون لدينا :

$$S_n/\mathbb{A}_n\cong\{1,-1\}\Rightarrow|S_n/\mathbb{A}_n|=2\Leftrightarrow\frac{n!}{|\mathbb{A}_n|}=2\Rightarrow|\mathbb{A}_n|=\frac{n!}{2}$$

السؤال الثالث : (١٢ درجة)

(أ) أكتب نص كل من " تعميم مبرهنة كيلي" و "مبرهنة سيلو الأولى" موجودة في الكتاب المقرر.

(ب) البرهان موجود في الكتاب المقرر.

(جـ) إن $|G| = 48 = 2^4.3$. لذا فمن مبرهنة سيلو الأولى توجد زمرة سيلو جزئية H من النوع 2 ورتبتها 16 في G.

ومن تعميم مبرهنة كيلي. يوجد تشاكل $\phi: G \to A(S)$ ، حيث $S = \{Hg| \; g \in G\}$ ونواة $k_\phi = \phi$ هي أكبر

زمرة جزئية ناظمية في G ومحتواة في H. ولما كان $|S| = 3$ فإن :

$|A(S)| = 3! = 6$ و بالتالي فان $|A(S)| \nmid |G|$ وهذا يقتضي بالضرورة كون ϕ ليس تشاكلا متباينا $\Leftrightarrow k_\phi \neq \{e\}$

ومنه نجد أن $\{e\} \neq k_\phi \lhd G$ وتكون G زمرة غير بسيطة.

السؤال الرابع : (٩ درجات)

أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :

(أ) هذه عبارة صائبة ، لأن $|G| = 343 = 7^3$ لذا فان $|Z(G)| > 1 \Leftrightarrow Z(G) \neq \{e\}$ وبالتالي هذا يقتضي

ضرورة وجود $e \neq y \in Z(G)$.

(ب) هذه عبارة خاطئة ، لأن $k_\phi = < 3 > \Leftarrow |k_\phi| = 6 \Leftarrow | \; \mathbb{Z}_{18} / \; k_\phi | \; = 3$ ولما كانت $\mathbb{Z}_{18} / k_\phi \cong \phi(\mathbb{Z}_{18}) \leq \mathbb{Z}_{14}$

(مبرهنة) فإن $|\mathrm{Z}_{14}| \; | \; |\phi(Z_{18})| = 3$ وهذا مستحيل.

(جـ) هذه عبارة خاطئة ، لأن

$$A, B \leq G \Rightarrow A \cap B \leq G \Rightarrow A \cap B < B$$
$$\Rightarrow |A \cap B| = 3 \; | \; |B| = 10$$

وهذا مستحيل.