بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود الاختبار النهائي في المقرر ٣٤٣ ريض

قسم الرياضيات الفصل الثاني ١٤٣٠/١٤٣١هـ الزمن: ٣ ساعات

س١: إذا كانت $g=(g_1,g_2,g_3)\in G=\mathbb{Z}_{12}\times U_{14}\times S_{13}$ ، حيث: 16

$g_1=3$ ؛ $g_2=9$ ؛ $g_3=(1,5,3,7)(2,6,4,8,12,13)(2,7,3,5)$

فأجب عما يأتي:

(أ) املأ الفراغات الآتية:

$\boxed{1}\ |g_1|=\boxed{\cdots}$ $\boxed{2}\ |g_2|=\boxed{\cdots}$ $\boxed{3}\ |g_3|=\boxed{\cdots}$ $\boxed{4}\ |g|=\boxed{\cdots}$

$\boxed{5}\ \langle g\rangle\cong\boxed{\cdots}$ $\boxed{6}\ Aut(\langle g\rangle)\cong\boxed{\cdots}$ $\boxed{7}\ g_3\ \boxed{\cdots}\ A_{13}$

$\boxed{8}\ g^{-1}=\boxed{\cdots}$ $\boxed{9}\ |N_{S_{13}}(g_3)|=\boxed{\cdots}$ $\boxed{10}\ C_{g_3}=\boxed{\cdots}$

(ب) جد $\sigma\in S_{13}$ بحيث $\langle\sigma\rangle\cong\mathbb{Z}_{42}$ ،

(ج) إذا كانت H زمرة سيلو الجزئية من النوع 3 في G فجد $|H|$.

(د) جد $\alpha,\beta\in S_{13}$ بحيث $D_{13}\cong\langle\alpha,\beta\rangle\le S_{13}$.

س٢: (أ) إذا كانت G زمرة دائرية رتبتها n فأثبت أن: $G\cong\mathbb{Z}_n$. 10

(ب) إذا كانت $N\trianglelefteq G$ و $H\le G$ فأثبت أن: $HN\le G$.

(ج) وظف الفقرتين (أ) و(ب) في إثبات صحة كل من (١) و(٢) فيما يلي:

(١) أي زمرتين دائريتين لهما الرتبة نفسها تكونان متماثلتين.

(٢) إن $HN=NH$. [لاحظ أن إجابة كل من (١) و(٢) لا تزيد عن سطرين]

س٣: (أ) اكتب نص مبرهنة سيلو الثالثة. 10

(ب) إذا كانت G زمرة منتهية و $p\,|\,|G|$ وكان s_p عدد زمر سيلو الجزئية من النوع p فأثبت أن: $s_p\,|\,|G|$.

(ج) إذا كانت G زمرة بسيطة رتبتها 168 فأثبت بالتفصيل أنها لا تملك زمرة جزئية رتبتها 28 .

(د) إذا كانت G كما وردت في الفقرة (ج) فاملأ الفراغ: $s_7=\boxed{\cdots}$.

س٤: أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يلي: 14

(أ) $S_4\cong\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_8$ (ب) $A_4\not\cong D_6$

(ج) $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5\cong\mathbb{Z}_{30}$ (د) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_n$

(هـ) لا توجد زمرة بسيطة G رتبتها p^n لكل $n\ge 2$.

(و) توجد زمرة بسيطة G رتبتها 416 .

بسم الله الرحمن الرحيم

لا يكت

هذا ال

س١

(أ) ٨

$\boxed{1}$ $|g_1| = 4 = 2^2$ ✓ $\frac{1}{2}$

$\boxed{2}$ $|g_2| = 3$ ✓ $\frac{1}{2}$

$\boxed{3}$ $|g_3| = 8 = 2^3$ ✓ 1

$\boxed{4}$ $|g| = 2^3 \cdot 3 = 24$ ✓ 1 — القاسم المشترك الأصغر

$\boxed{5}$ $\langle g \rangle \cong \cancel{Z} \cancel{S_4}$ صفر

$\boxed{6}$ $Aut(\langle g \rangle) \cong U_{24}$ ✓ 1

$\boxed{7}$ $g_3 \notin A_{13}$ ✓ 1

$\boxed{8}$ $g^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1}, g_3^{-1}) = (9, 11, (1, 7, 13, 12, 8, 4, 6, 2))$ ✓ 1

$\boxed{9}$ $|N_{S_{13}}(g_3)| = 960 = 8 \cdot 5!$ ✓ 1

$\boxed{10}$ $C_{g_3} = \frac{|S_{13}|}{|N_{S_{13}}(g_3)|} = \frac{13!}{8 \cdot 5!} = \frac{13!}{2^3 \cdot 5!}$ ✓

(ب) ٢

$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)(8, 9, 10)(11, 12)(13)$ ✓

$\sigma \in S_{13}$ ، $\langle \sigma \rangle \cong Z_{42}$ ١

(جـ) إذا كانت H زمرة سيلو الجزئية من النوع 3 فإن $|G|$ ٢

$|G| = 13! \cdot 6 \cdot 12 = 3^7 \cdot 2^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

$\Rightarrow |H| = 3^7$

لا يكتب
هذا الهـ

م

$\frac{15}{16}$

(٣)

أ) $\alpha = (1,13)(2,12)(3,11)(4,10)(5,9)(6,8)(7)$

$\beta = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13)$

$D_{13} \cong \langle \alpha, \beta \rangle \leq S_{13}$ حيث

ب) لتكن $G = \langle a^i \mid 1 \leq i \leq n \,,\, a^n = a^0 = e \,,\, i \in \mathbb{Z}^+ \rangle$ نلاحظ ان $a^i = a^j \Leftrightarrow i = j$

$a^i = a^j \Leftrightarrow i = j$, $1 \leq i, j \leq n$ (م)

$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$

(٥,٥)

~~لنعرف ونوجد~~ ~~تشاكل~~ لنعرف تطبيق من G الى $\mathbb{Z}_n$ كما يلي

$\phi : G \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ حيث

$\phi(a^i) = [i]$

1) ان ϕ متباين لان

$\forall\, a^i, a^j \in G \Rightarrow \phi(a^i) = \phi(a^j)$

$\Rightarrow [i] = [j]$ تعريف ϕ

$\Rightarrow i = j$ من تعريف فصائل الصف

$\Rightarrow a^i = a^j$ ملاحظة من تعريف G

$\therefore$ ϕ تطبيق متباين

2) ان ϕ غامر لان $|\mathbb{Z}_n| = |G| = n$

و ϕ تطبيق متباين $\Leftarrow$ ϕ غامر

3) ان ϕ تشاكل لان

$a^i, a^j \in G \Rightarrow \phi(a^i a^j) = \phi(a^{i+j})$

$= [i+j]$ تعريف ϕ

$= [i] +_n [j]$ من تعريف الجمع

$= \phi(\ldots)\,\phi(\ldots)$ [illegible]

(ب) $H \le G$, $N \le G \Leftarrow N \trianglelefteq G$

1 1/2

$e e = e \in HK \Rightarrow HK \neq \emptyset$

نفرض وجود

$x = h_1 k_1$, $y = h_2 k_2$

$x, y \in HK \Rightarrow x y^{-1} \in HK$

$x, y \in HK \Rightarrow (h_1 k_1)(h_2 k_2)^{-1}$

$\Rightarrow (h_1 k_1)(k_2^{-1} h_2^{-1})$ مبرهنة

$\Rightarrow \cancel{(\ldots)}$ ~~... ناظمية~~

$\Rightarrow \cancel{(\ldots)}$

$\Rightarrow (h_1 k_1 k_2^{-1} h_2^{-1})$ بالتجميع

$\Rightarrow (h_1 k_n h_2^{-1} k_2)$ لأن N ناظمية

$\Rightarrow (h_1 h_2^{-1} k_n^{-1} k_2)$ لأن N ناظمية

$\Rightarrow (h_1 h_2^{-1})(k_1 k_n) \in HN$ بالتجميع

(جـ)

(٣) (1) لأن كل منهما تشاكل $\mathbb{Z}_n$ حيث n رتبة كل منهما

$G_1 \cong \mathbb{Z}_n \wedge G_2 \cong \mathbb{Z}_n \Rightarrow G_1 \cong G_2$

ومن التعدي فإن $G_2 \cong G_1$

(2) الشرط اللازم والكافي لتكون $HN \le G$ حيث $H \le G$ و $N \le G$ هو ان تكون $HN = NH$

س٣ (أ) (١) لتكن G زمرة منتهية وكان $p^{\alpha} \mid |G|$ ان عدد زمر سيلو الجزئية الأولية من النوع p تتطابق مع العدد 1 قياس p ويقسم رتبة G

(ب) ليكن ~~{T ...}~~

٢

$L = \{ T \; ; \; \text{T زمرة سيلو الجزئية p} \}$

ليكن G | بالترافق

من مبرهنة سيلو الثانية فإن I ترافق نفسها

$$|I_{\text{عدد مرافقات}}| = |L| = [G : G_x]$$

الرموز غير واضحة

مقصودة

لا يوجد للحلول

ولكن

$$[G : G_x] \mid |G|$$

$$\Rightarrow |L| \mid |G|$$

ج) نفرض جدلاً وجود زمرة جزئية رتبتها 28 ولتكن H

(٤)

$$H < G \Rightarrow \exists\ S = \{Hx : x \in G\} \ni |S| = \frac{|G|}{|H|} = 6$$

$$\Rightarrow \exists\ A(S) \ni |A(S)| = 6!$$

$$\Rightarrow |G| \nmid |A(S)|$$

من تعميم مبرهنة كيلي فإنه يوجد تشاكل

$$\varphi : G \longrightarrow A(S)$$

نواته K_φ و K_φ هو أكبر زمرة جزئية ناظمية في G محتواة في H

∴ من المبرهنة الأولى للتشاكل

$$G/K_\varphi \cong \varphi(G) \le A(S)$$

لنفرض جدلاً أن φ متباين $\Rightarrow K_\varphi = \{e\}$

$$\Rightarrow G/K_\varphi = G/\{e\} \cong G \cong \varphi(G) \le A(S)$$

$$\Rightarrow |G| = |\varphi(G)| \mid |A(S)|$$ من لاغرانج لأن $\varphi(S) \le A(S)$

$$\Rightarrow |G| \nmid |A(S)|$$

وهذا تناقض إذاً لا مفر من التناقض إلا بالتسليم

$$K_0 \leq H < G$$

$$\Rightarrow K_0 \lhd G$$ مبرهنة

$\Rightarrow$ ~~G~~ G زمرة غير بسيطة

وهذا تناقض مع الفرض (أ) ولا مخرج
من هذا التناقض الا بالتسليم ان G لا تملك زمرة جزئية
رتبتها 28

لا توجد زمرة

(أ) العبارة خاطئة لان $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$ ابدالية
و S_4 غير ابدالية ✓

(ب) التعبير صائب لان D_6 يوجد بها عنصر من الرتبة 6
بينما A_4 لا يوجد بها عنصر من الرتبة 6 ✓

(ج) العبارة صائبة لان
$(2, 3, 5) = 1$ الاعداد اولية فيما بينها ✓

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{30}$$

(د) العبارة صائبة لان $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ زمرة دائرية
و $n = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}|$ حسب مبرهنة سابقة فان

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$$ ✓

(هـ) العبارة صائبة

(١) من مبرهنة سيلو الأولى بشرطها الثاني

$2 \le i \le n$

فإن $P^{i} \trianglelefteq P^{i+1}$ وبالتالي فإن [illegible] P^{i} P^{i+1}

أعداد [illegible]

$|G| = P^{n} \trianglerighteq P^{n-1} \Rightarrow G$ غير بسيطة

(و) التقرير خاطئ

(١) $|G| = 2^{5} \cdot 13$

من مبرهنة سيلو الأولى يوجد زمرة جزئية من النوع 2

ولتكن H رتبتها 2^{5}

ومن مبرهنة سيلو الثالثة فإن عدد زمر سيلو الجزئية من النوع 2

$S_2 = 1 + 2k$ $\mid |G|$

$13 \mid |G|$

إذا ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ فإن زمرة سيلو الجزئية وحيدة أي ذاتية [illegible]

$\forall g \in G \Rightarrow g^{-1}Hg = H \Rightarrow H \triangleleft |G|$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ [illegible]