بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود / الرياض — الاختبار **النهائي** — في المقرر ٣٤٣ ريض

كلية العلوم / قسم الرياضيات — الفصل الدراسي **الثاني** — ١٤٣٣/١٤٣٢ هـ — الزمن : ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

١٧ س١ : (أ) إذا كانت $G=U_{25}$ فأجب عما يأتي :-

أولاً : املأ الفراغات الآتية :-

$\boxed{1}$ $G=\{1,2,3,4,6,\ldots\}$ $\boxed{2}$ $|G|=\boxed{\cdots}$

$\boxed{3}$ $\langle 2\rangle=\{2,4,8,16,7,14,3,6,12,24,23,21,17,9,18,11,\ldots\}$

$\boxed{4}$ $2^{-1}=\boxed{\cdots}$ $\boxed{5}$ $\langle 7\rangle=\{7,24,\ldots\}$ $\boxed{6}$ $G/\langle 7\rangle=\{\langle 7\rangle,\langle 7\rangle 2,\ldots\}$

ثانياً : أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :-

(i) G زمرة دائرية مولدة بـ 2 (ii) G زمرة بسيطة (iii) $G\cong\mathbb{Z}_{20}$

(iv) $Aut(G)\cong U_{20}$ (v) $|\langle 7\rangle|\neq 4$ (vi) $|G/\langle 7\rangle|=5$.

(ب) ناقش صحة العبارة الآتية :-

إذا كان $\sigma=(1,3,5)(2,4,6,8)\in S_8$ ، فإنه يوجد $\alpha\in S_8$ ، بحيث ؛

$$\alpha^{-1}\sigma\alpha=(1,5,3,7)(2,4)(6,8)$$

(ج) إذا كان $g=(7,\sigma,4)\in U_{25}\times S_8\times\mathbb{Z}_5$ و σ كما وردت في (ب)

فاملأ الفراغات الآتية :-

① $g^{-1}=(\ldots)$ ② $g^{2}=(\ldots)$ ③ $|g|=\boxed{\cdots}$

---

٩ س٢ : (أ) متى نقول إن ϕ تماثل من الزمرة G إلى الزمرة $\bar{G}$ ؟

(ب) إذا كان $\phi:G\to\bar{G}$ تماثلاً وكان $x\in G$ بحيث $|x|=n$ فأثبت أن $|\phi(x)|=n$.

---

١٤ س٣ : (أ) إذا كانت G منتهية ، فمتى نقول إن H زمرة سيلو جزئية من النوع P في G ؟

(ب) إذا كانت A و B زمرتي سيلو جزئيتين من النوع P في G فأثبت أن A و B مترافقتان في G .

(ج) أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة G رتبتها 272 .

---

١٠ س٤ : (أ) متى نقول إن G هي زمرة حاصل الضرب المباشر الداخلي للزمر $H_1,\ldots,H_n$ ؟

(ب) إذا كانت G هي حاصل الضرب المباشر الداخلي للزمر $H_1,\ldots,H_n$

وكانت $\pi=H_1\times H_2\times\cdots\times H_n$ فأثبت أن : $G\cong\pi$

(ج) متى تكون G الواردة في (ب) زمرة منتهية وغير إبدالية بدلالة H_i لكل i ؟

لا يكتب
هذا الهامش

س ٢ / أ

$\zeta = (1,3,5)(2,4,6,8)$

$\zeta^2 = (1,5,3)(2,6)(4,8)$

$\zeta^3 = (1)(3)(5)(2,8,6,4)$

$\zeta^4 = (1,3,5)(2)(4)(6)(8)$

$\zeta^5 = (1,5,3)(2,4,6,8)$

$\zeta^6 = (1)(3)(5)\ ($

$$(1,5,3,7)(2,4)(6,8)$$
$$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\quad\downarrow\downarrow\quad\downarrow\downarrow$$
$$(1,2,3,4)(5,6)(7,8)$$

$$(1)(5,2)(3)(7,4,6)(8)$$
$$= (5,2)(7,4,6)$$

س ١ / ب

نضع $\alpha = (5,2)(7,4,6)$

$\therefore\ \alpha^{-1}\zeta\alpha = (5,2)(7,6,4)(1,5,3,7)(2,4)(6,8)(5,2)(7,4,6)$

$= (1,5,3,7)(2,4)(6,8)$

هذا التعريف مناسب

لا يكتب في هذا الهامش

تابع س ١

تابع ثانياً:

~~(iv) $|\langle 7\rangle| = |\{a \in G : 7^n = 1\}|$~~

(iv) $|\langle 7\rangle| = |\{a \in G : 7^n = 1\}|$

وبما أن $7^4 = 1$ عند $n = 4$ صورتية $\langle 7\rangle$

∴ التقرير خاطئ

1

(vi) $\left|\frac{G}{\langle 7\rangle}\right| = [G : \langle 7\rangle] = \frac{|G|}{|\langle 7\rangle|} = \frac{20}{4} = 5$

∴ التقرير صادق

1

ج

10

~~① $g^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1}, g_3^{-1}) - ($~~

~~① $g^{-1} = (18, (1,7,3,5)(2,4)(6,8), 21)$~~

~~② $g^2 =$~~

① $g^{-1} = (18, (1,5,3)(2,8,6,4), 21)$

1

$\beta^2 = (1,3)(5,7)(2)(4)(6)(8)$

② $g^2 = (24, (1,3)(5,7), 8)$

$|7| = 4$, $|\beta| = [3,4] = 12$, $|4| = 25$

③ $|g| = [4, 12, 25] = \boxed{300}$

ب) نفرض $\alpha = (5,2)(7,4,6)$

$\alpha^{-1}\beta\alpha = (5,2)(7,6,4)\circ(1,3,5)(2,4,6,8)\circ(5,2)(7,4,6)$

لا يكتب
هذا الهامش

١٥ | ٢ أولاً: ٥ | ١٠٫٥

[1] $G = \{1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14,16,17,18,19,21,22,23,24\}$ ✓ 1

[2] $|G| = 20$ ✓ 1

[3] $\langle 2\rangle = \{2,4,8,16,7,14,3,6,12,24,23,21,17,9,18,11,22,19,13,1\}$ ✓ 1

[4] $2^{-1} = \boxed{13}$ ✓ 1

[5] $\langle 7\rangle = \{7,24,18,13\}$ ✓ 1

[6] $\frac{G}{\langle 7\rangle} = \{\langle 7\rangle, \langle 7\rangle 2, \langle 7\rangle 3, \langle 7\rangle 4, \langle 7\rangle 5\}$

$5 \notin G$

ثانياً: ٥٫٥

(i) G زمرة دائرية مولدة بـ 2 . التعبير صائب

لأن $G = \langle 2\rangle$ وذلك من [1] و [2] في أولاً. ✓ 1

~~(ii) بما أن G مولدة بـ~~ $\langle 7\rangle$

(ii) بما أن $\langle 7\rangle$ دائرية $\Longrightarrow$ إبدالية ——— مبرهنة

$\Longrightarrow G \triangle \langle 7\rangle \neq \{1\}$ ——— مبرهنة 1

∴ $\langle 7\rangle$ ناظمية في G وغير تافهة $\Longrightarrow G$ زمرة غير بسيطة ✓

∴ التعبير صائب

(iii) $G \cong \mathbb{Z}_{20}$. التعبير صائب

البرهان:

بما أن G دائرية $\Longrightarrow G$ إبدالية

إذن $\mathbb{Z}_{20}$ و G إبداليتين

$G \cong \mathbb{Z}_{20} \Longleftarrow \left\{ 20 = |G| = |\mathbb{Z}_{20}| \right.$ ½

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \not\cong \mathbb{Z}_8$

(iv) $\mathrm{Aut}(G) \cong U$ ...

$|x| = n \Leftarrow$ n أصغر عدد صحيح يحقق المساواة $x^n = e$

$$(\varphi(x))^n = \underbrace{\varphi(x)\,\varphi(x)\cdots\varphi(x)}_{n \text{ مرة}}$$

$$= \varphi(\underbrace{x \cdots x}_{n}) = \varphi(x^n)$$

$$= \varphi(e)$$

$$= \bar{e}$$

نفرض m عدد صحيح $1 < m < n$ بحيث $x^m = e$

$$(\varphi(x))^m = \underbrace{\varphi(x)\cdots\varphi(x)}_{m \text{ مرة}}$$

$$= \varphi(x \cdots x) = \varphi(x^m)$$

$$= \varphi(\bar{e})$$

$$= \bar{e}$$

وبما أن φ متباين

$$x^m = x^n$$

$$\Rightarrow m = n$$

$$(\varphi(a))^n = e \Rightarrow |\varphi(a)| = n$$

بتعويض

مرحلة

س ٣ | أ | إذا وجد تطبيق $\varphi: G \longrightarrow \bar{G}$
تشاكل وغامر ومتباين

ب | البرهان $|x| = n$ ⟸ n أصغر عدد صحيح يحقق المساواة $x^n = e$

$$(\varphi(x))^n = \underbrace{\varphi(x)\,\varphi(x) \ldots \varphi(x)}_{n \text{ مرة}}$$ تعريف

$= \varphi(\underbrace{x\,x \ldots x}_{\text{مرة}})$ لأن φ تشاكل

$= \varphi(x^n)$

$= \varphi(e)$ بالتعريف ⊛

$= \bar{e}$ مبرهنة

$|\varphi(x)| = m$

⊛ $x^m = e$ لنفرض أنه يوجد $1 < m < n$ حيث

$$(\varphi(x))^m = \underbrace{\varphi(x) \ldots \varphi(x)}_{m \text{ مرة}}$$

$= \varphi(x \ldots x)$ لأن φ تشاكل

$= \varphi(x^m)$

$= \varphi(e)$ بالتعريف ⊛ خطأ!!

$= \bar{e}$

وبما أن φ متباين ⟸ $x^m = x^n$

⟸ $m = n$

إذن $[\varphi(x)]^n = e$ ⟸ $|\varphi(x)| = n$

$2^4 \times 17 \mid 2^4!$

س ٣ (ج) $|G| = 272 = 2^4 \times 17$

من مبرهنة سيلو الأولى توجد زمرة جزئية أولية من النوع 17 رتبتها 17

ولتكن H

$H < G \Rightarrow \exists S = \{Hx : x \in G\} \ni |S| = [G:H] = 2^4 = 16$

$\Rightarrow \exists A(S) \ni |A(S)| = (16)!$

$\Rightarrow 2^4 \times 17 = |G| \nmid |A(S)| = 16!$ ——— ☆

من تعميم مبرهنة كيلي يوجد $\varphi : G \xrightarrow{\text{تشاكل}} A(S)$ نواته K_φ أكبر زمرة جزئية ناظمية في G محتواة في H.

من المبرهنة الأساسية الأولى للتشاكل يكون لدينا:

$G/K_\varphi \cong \varphi(G) \le A(S)$

لنفرض جدلاً أن $K = \{e\}$

$\Rightarrow G/K_\varphi \cong G/\{e\} \cong G \cong \varphi(G) \le A(S)$

$\Rightarrow |\varphi(G)| \mid |A(S)|$ ——— من لاجرانج

$\Rightarrow |G| \mid |A(S)|$ ——— لأن $G \cong \varphi(G)$

وهذا تناقض مع ☆

لا مخرج من هذا التناقض إلا بالتسليم بأن $K \neq \{e\}$

إذن $\{e\} \neq K \triangleleft G \Leftarrow$ G زمرة غير بسيطة

إذن لا توجد زمرة بسيطة G رتبتها 272.

س٢

(٢) أ) نتوصل عن H زمرة سيلو جزئية من النوع p في G
إذا كانت G منتهية بحيث $|G|=p^n m$ حيث $n\geq 1$ و $p\nmid m$ و $H\leq G$ حيث
$|H|=p^n$ و $p^{n+1}\nmid |G|$

ب) البرهان:

(٧) لتكن A و B زمرتي سيلو جزئيتين من النوع p لنعرف R كالتالي

$$|R|=[G:G_B] \Leftarrow R=\{Ax : x\in G\}$$

لنجعل $B|_R$ كالتالي

$$* : R\times B \longrightarrow R$$

$$(Ax,y) \longmapsto A(xy)$$

$\therefore \cancel{A} (Ax)y = A(xy) \;, y\in B$

بتطبيق مبرهنة متطابقة نجد أن $|R| \equiv |R_B| \bmod p$

بما أن $p\nmid |R| \Leftarrow |R_B|\neq 0$

لتكن $Ax\in R_B$

تعريف R_B ——— $\Rightarrow Axy = Ax \;\; \forall y\in B$

بضرب الطرفين في x^{-1} ——— $\Rightarrow (Axy)x^{-1} = (Ax)x^{-1}$

خاصية التجميع ——— $\Rightarrow A(xyx^{-1}) = A(xx^{-1})$

خاصية التناظر ——— $\Rightarrow Axyx^{-1} = Ae$

خاصية المحايد ——— $\Rightarrow Axyx^{-1} = A$

——— $\Rightarrow xyx^{-1}\in A$

$\Rightarrow xBx^{-1}\leq A$

بما أن $|A|=|B| \Rightarrow xBx^{-1}=A$

$\therefore$ A و B مترافقتان في G.

س ٥) [٩] نقول ان G هي حاصل الضرب المباشر الداخلي للزمر $H_1, \dots, H_n$ اذا كان $H_1, \dots, H_n \triangleleft G$ بحيث تحقق

1) $G = H_1 H_2 \cdots H_n$

2) $g \in G$ يكتب بصورة وحيدة على الشكل:

$$g = a_1 a_2 \cdots a_n \quad , \quad a_i \in H_i$$

---

(٦) نعرف التطبيق $\varphi : T \longrightarrow G$

$$\varphi((a_1, \dots, a_n)) = a_1 \cdots a_n$$

1) ان φ غامر لأنه

$a_1 \cdots a_n \in G \Longrightarrow \exists (a_1, \dots, a_n) \in T \ni \varphi((a_1, \dots, a_n)) = a_1 \cdots a_n$

تعريف φ ———

2) ان φ متباين لأنه

$(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in T \ni \varphi((a_1, \dots, a_n)) = \varphi((b_1, \dots, b_n))$

$\Longrightarrow a_1 \cdots a_n = b_1 \cdots b_n$ ——— تعريف φ

$\Longrightarrow a_i = b_i \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$ ——— لأن عناصر G تكتب بصورة وحيدة

$\Longrightarrow (a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)$ ——— تعريف تساوي زوجين مرتبين

3) ان φ تشاكل لأنه

$\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in T ; \varphi((a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n)) = \varphi((a_1 b_1, \dots, a_n b_n))$

تعريف العملية في T ———

$= a_1 b_1 \cdots a_n b_n$ ——— تعريف φ

$= a_1 \cdots a_n\, b_1 \cdots b_n$ ——— مبرهنة $a_i b_j = b_j a_i$ لأن

$= \varphi((a_1, \dots, a_n))\, \varphi((b_1, \dots, b_n))$ ——— تعريف φ

من 1 و 2 و 3 $\Longleftarrow G \simeq T$

---

٨) تكون G غير ابدالية اذا كانت واحدة من H_i على الأقل غير ابدالية

(١٤) غير ابدالية

ومن تكون (؟) مبرهنة !؟

لا يكتب في
هذا الهامش

تابع (س٣)

(ب) عدد المناقلات ζ ~~4~~ هو 5 $\Leftarrow$ فردية

① $\zeta \notin A_8$, ~~$\zeta \not\triangle S_8$~~

إذن $\zeta \not\triangle S_8$ $\Leftarrow$ التعبير خاطئ

انتهى