بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود / الرياض — الاختبار النهائي — في المقرر ٣٤٣ ريض
كلية العلوم / قسم الرياضيات — الفصل الدراسي الثاني ٣٣ ١٤٣٤/١٤ هـ — الزمن : ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س١ : إذا كان $G = U_{12} \times \mathbb{Z}_{10} \times S_{14}$ ، $g = (g_1, g_2, g_3) \in G$ ، حيث :

$g_1 = 5$ ، $g_2 = 2$ ، $g_3 = (1,3,5,7,8,10,12,14)(2,14,12,10,8,6,11,9)$

فأجب عما يأتي :-

(أ) املأ الفراغات الآتية :-

① $|g_1| =$ ... ② $|g_2| =$ ... ③ $|g_3| =$ ... ④ $|g| =$ ...
⑤ $e =$ ... ⑥ $g^{-1} =$ ... ⑦ $|U_{12}| =$ ... ⑧ g_3 ... A_{14}
⑨ $\langle g \rangle \cong$ ... ⑩ $Aut(\langle g \rangle) \cong$ ... ⑪ $|G| =$ ... ⑫ $|N_{S_{14}}(g_3)| =$ ...

(ب) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :-

(١) $U_{12} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (٢) $\langle g_3 \rangle$ زمرة بسيطة (٣) G تملك زمرة جزئية رتبتها 68 .

(٤) توجد زمرة جزئية في S_{14} رتبتها 49 (٥) توجد $\sigma \in S_{14}$ بحيث $\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$

س٢ : (أ) متى نقول إن G زمرة غير بسيطة ؟

(ب) إذا كانت G زمرة منتهية، فمتى نقول إن H زمرة سيلوجزئية في G من النوع P ؟

(جـ) إذا كانت G زمرة بسيطة رتبتها 360 ، فأجب عما يأتي :-

(١) أثبت، بالتفصيل، أن G لا تملك زمرة جزئية H رتبتها 72 .

(٢) املأ الفراغ الآتي :-

$|M| =$ ... ، حيث M زمرة سيلوجزئية في G من النوع 2 .

(٣) هل $gMg^{-1} = M$ لكل $g \in G$ ؟ ولماذا ؟ ، حيث M هي الواردة في (٢) فقرة (جـ) .

(٤) هل فقرة (جـ) تكفي لإثبات عدم صحة عكس مبرهنة لاغرانج ؟ ولماذا ؟ .

س٣ : إذا كانت G هي زمرة حاصل الضرب المباشر الخارجي للزمر : G_1 و G_2 و G_3 وكانت $\bar{G}_2 = \{(e_1, x, e_3) \in G \mid x \in G_2\}$ ، فأجب عما يأتي :-

(أ) أثبت أن :

(١) $\bar{G}_2 \trianglelefteq G$

(٢) $\bar{G}_2 \cong G_2$

(ب) متى تكون G زمرة إبدالية ؟

(جـ) متى تكون G زمرة منتهية ؟

نسأل الله لكم التوفيق .