بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود / الرياض — الاختبار النهائي — في المقرر ٢٤٣ ريض
كلية العلوم / قسم الرياضيات — الفصل الدراسي الثاني — ١٤٣٤/١٤٣٥ هـ الزمن : ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س١ : إذا كانت $g=(g_1, g_2, g_3, g_4)\in G=S_{12}\times U_{11}\times \mathbb{Z}_6\times \mathbb{Z}_{13}^*$ ، حيث : ١٥
$g_1=(1,12)(5,7)(4,12)(6,7,9)$ و $g_2=2$ ، $g_3=3$ ، $g_4=5$
فأجب عما يأتي :
(أ) املأ الفراغات الآتية :
$\boxed{1}\ |g|=\boxed{\dots}$ $\boxed{2}\ e=(\dots\dots)$ $\boxed{3}\ g^{-1}=(\dots\dots)$
$\boxed{4}\ \langle g_1\rangle \cong \boxed{\dots}$ $\boxed{5}\ \langle g\rangle \cong \boxed{\dots}$ $\boxed{6}\ Aut(\langle g\rangle)\cong \boxed{\dots}$
$\boxed{7}\ g_1 \boxed{\dots} A_{12}$ $\boxed{8}\ |G|=\boxed{\dots}$ $\boxed{9}\ C_{g_1}=\boxed{\dots}$ عدد مرافقات $g_1=$
(ب) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :
(١) توجد $\sigma\in S_{12}$ بحيث : $\langle\sigma\rangle\cong \mathbb{Z}_{13}^*$ ،
(٢) لا توجد $H<S_{12}$ بحيث : $H\cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_7$ .
(٣) توجد زمرة سيلوجرية في $G$ من النوع $2$ ورتبتها $2^{13}$ .
(٤) لا توجد $K<G$ بحيث : $|K|=3528$ .

س٢ : (أ) املأ الفراغين : ٦
(i) $Aut(G)=\{\dots\dots\}$
(ii) $Inn(G)=\{\dots\dots\}$
(ب) إذا كان $T_g : G\to G$ تطبيقاً ، حيث : $xT_g=g^{-1}xg$ و $g\in G$ ،
فأثبت أن : $T_g\in Aut(G)$ ،

س٣ : (أ) متى نقول إن $G$ زمرة بسيطة ؟ ٩
(ب) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :
(١) لا توجد زمرة بسيطة $G$ رتبتها $mp^n$ ، حيث $m<p$ و $n\in\mathbb{Z}^+$ .
(٢) توجد زمرة بسيطة $G$ رتبتها $360$ و $H<G$ ، بحيث : $|H|=72$ .
(٣) إذا كانت $G$ إبدالية فإن : $|Inn(G)|=1$ .

س٤ : (أ) متى نقول إن $G$ هي زمرة حاصل الضرب المباشر الخارجي للزمر : $G_1, \dots, G_n$ ؟ ١٠
(ب) " " " " " $G$ " " " الداخلي " : $G_1, \dots, G_n$ ؟
(ج) إذا كانت $G$ هي زمرة حاصل الضرب المباشر الداخلي للزمر : $G_1, \dots, G_n$
وكان $i\neq j$ فأثبت أن :
(١) $G_i\cap G_j=\{e\}$
(٢) $a\in G_i \wedge b\in G_j \Rightarrow ab=ba$
(د) إذا كانت $M=\{G \mid |G|=12\}$ وعرّفنا علاقة التماثل " $\cong$ "
على $M$ فأوجد عدد أصناف التكافؤ المختلفة في $M$ .

أتمنى لكم التوفيق د. سلمان

لا يكتب في
هذا الهامش

(٢) ثانياً

$\boxed{1}$ $|g| = lcm(|g_1|, |g_2|, |g_3|) = lcm(12, 10, 2, 4) = 60 = 5 \times 12$

$\boxed{2}$ $e = ((1), 1, 0, 1)$, $(1) \in S_{12}$, $1 \in U_{11}$, $0 \in \mathbb{Z}_6$, $1 \in \mathbb{Z}_{13}$

$\boxed{3}$ $g^{-1} = ((1,2,4)(3,7,6,9), 6, 3, 8)$

$\boxed{4}$ $\langle g_1 \rangle \cong \mathbb{Z}_{12}$

$\boxed{5}$ $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_{60}$, $\boxed{6}$ $Aut(\langle g \rangle) \cong U_{60}$

$\boxed{7}$ $g_1 \notin A_{12}$, $\boxed{8}$ $|G| = 12! \times 10 \times 6 \times \overset{12}{13} =$ صفر

$\boxed{9}$ $C_{g_1} = \dfrac{|S_{12}|}{|C(g_1)|} = \dfrac{12!}{3 \times 4 \times 5!} = 332640$

[redacted]

لا يكتب في هذا الهامش

أجب بما يأتي: (٦)

(1) لا يوجد $\sigma \in S_{12}$ بحيث: $\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_{13}^*$

ج/ العبارة صائبة لأن: $\mathbb{Z}_{13}^* = \langle 2 \rangle$ حيث $2 \in \mathbb{Z}_{13}^*$

كما أنه وحيث أنها زمرة دورية رتبتها 12 فحسب نظرية سابقة $\mathbb{Z}_{13}^* \cong \mathbb{Z}_{12}$

أيضاً بالإمكان إيجاد دورة طولها 12 من $S_{12}$ مثلاً ~~(1,2,3,4,5,6,7,8,9)~~

$(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12) = \sigma$

لاحظ أن $|\sigma| = 12$ لجعل

$\varphi = \langle \sigma \rangle = \langle (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12) \rangle$

تكون $\sigma$ زمرة دورية رتبتها 12 فحسب نظرية سابقة:

$\varphi \cong \mathbb{Z}_{12}$ وتناظرية

وحيث "$\cong$" هي علاقة تكافؤ فهي متعدية أي أن:

$\varphi \cong \mathbb{Z}_{12} \wedge \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_{13}^* \Rightarrow \varphi \cong \mathbb{Z}_{13}^*$

وهو المطلوب

(2) لا يوجد $H \le S_{12}$ حيث $H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$ في الصفحة الأخرى طريقة أفضل

العبارة خاطئة، لأن $H = \langle \sigma \rangle = \langle (1,2)(3,4,5)(6,7,8,9,10,11,12) \rangle$

و $H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$ لأن

H زمرة إبدالية مولداتها $(7,8,9,10,11,12)$، $(1,2)$، $(3,4,5)$

رتبها على التوالي 2، 3، 7.

أي أن $H = \langle a,b,c ; a^7 = b^3 = c^2 = e, a=(6,7,8,9,10,11,12), b=(3,4,5), c=(1,2) \rangle$

ولكن $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$ زمرة إبدالية ومولدة بثلاثة عناصر $(1,0,0)$، $(0,1,0)$، $(0,0,1)$ وتحقق

$(0,0,1)^7 = (0,0,0)$ ، $(0,1,0)^3 = 0$ ، $(1,0,0)^2 = 0$

فإن $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \cong H$

[redacted]

[redacted]

لا يكتب في هذا الهامش

ب) ب: 2: طريقة أقصر:

العبارة خاطئة لأننا:

نلاحظ أن $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_{42}$

لأن $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$ مولدة بالعنصر $(1,1,1)$ ~~الذي~~ رتبته

$lcm(2,3,7) = 42$ وهي أيضاً $|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7| = 42$ أي أنها دورية

~~وحسب نظرية سابقة فإن~~

أيضاً لو أخذنا $< (1,2)(3,4,5)(6,7,8,9,10,11,12) > = H$ فإن

$H \leq S_{12}$ و $H$ زمرة دورية رتبتها $lcm(2,3,7) = 42$

أي أنها $H \cong \mathbb{Z}_{42}$ (حسب نظرية سابقة)

وبما أن "$\cong$" علاقة تكافؤ ⇐ تناظرية، متعدية

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_{42} \wedge H \cong \mathbb{Z}_{42}$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \cong H$

وبهذا يتبين خطأ العبارة

ب) ب: 3:

لاحظ أن: $|G| = 12! \times 10 \times 6 \times 12 = 2^{13} \times 420 99750 = 2^{14} \times 21049875$

فحسب مبرهنة سيلو توجد زمرة جزئية من الرتبة $2^{13}$

ولكن $\boxed{2^{13+1} \mid |G| \quad 2^{15} \nmid |G|}$ أي أن زمرة سيلو من النوع 2 في $G$ رتبتها $2^{14}$

وتكون العبارة ~~الخاصة~~ خاطئة

ا: ن: 21:

$3528 = 3^2 \times 7^2 \times 2^3$

~~فلوأخذ~~ العبارة صائبة لأنه لو فرضنا جدلاً وجود $K \le G$ بحيث

$|K| = 3528 \Rightarrow$ حسب لاغرانج أن $3528 \mid 12! \times 10 \times 6 \times 12$

ولكن أن بالحساب نجد أن $3528 \nmid 12! \times 10 \times 6 \times 12$

أي أن $|K| \nmid |G|$ تناقض مع الفرضية أي أن لا يمكن أن تكون $K \le G$ حسب لاغرانج

لا توجد $K \le G$ بحيث $|K| = 3528$ ومنه العبارة 6 صائبة

٢

١٤/١٥

لا يكتب في هذا الهامش

ج ١ :

$Aut(G) = \{\varphi : G \xrightarrow[\text{تقابل وتشاكل}]{\varphi} G\}$ ②

أي أنها كل تطبيقات التماثل من G إلى G

$Inn(G) = \{T_g \in Aut(G) ; g \in G, \ xT_g = g^{-1}xg\}$

ج ٢ : ٣,٥

① إن $T_g$ متباين لأن

$x, y \in G ; \quad xT_g = yT_g$ تعريف التباين

$\Rightarrow g^{-1}xg = g^{-1}yg$ تعريف $T_g$

$\Rightarrow g(g^{-1}xg)g^{-1} = g(g^{-1}yg)g^{-1}$ بالضرب من اليمين في $g^{-1}$ واليسار في $g$

$\Rightarrow (gg^{-1})x(gg^{-1}) = (gg^{-1})y(gg^{-1})$ خاصية التجميع

$\Rightarrow (e)x(e) = (e)y(e)$ " النظير

$\Rightarrow x = y$ " المحايد

$\therefore T_g$ متباين لأن $xT_g = yT_g \Rightarrow x = y$

② إن $T_g$ غامر لأن

$\forall y \in G \ \exists \ gyg^{-1} \in G ; \ (gyg^{-1})T_g = (g^{-1}gyg^{-1}g) = y$

$= (gg^{-1})y(g^{-1}g) = (e)y(e) = y$

لاحظ أن $gyg^{-1} \in G$ لأن $y, g, g^{-1} \in G$ و G زمرة

③ إن $T_g$ تشاكل لأن :

$x, t \in G \Rightarrow (xt)T_g = xtT_g = g^{-1}xtg$ تعريف $T_g$

$= g^{-1}xetg$ خاصية المحايد

$= (g^{-1}xg)(g^{-1}tg)$ خاصية النظير والتجميع

$= xT_g \ tT_g$ تعريف $T_g$

من ① و ② نجد أن $T_g$ تقابل ومن ③ مع ① و ② نجد أن $T_g$ تماثل من G إلى G

أي أن $T_g \in Aut(G)$

جـ ٣

س ١: أ) إذا كانت $G$ لا تحتوي على أي زمرة جزئية ناظمية فعلية غير $G$ و $\{e\}$ فقط (أي أنه لا توجد سوى زمرتين جزئيتين ناظميتين في $G$ هما $G$ و $\{e\}$) ①

جـ ب: ١:

⑥ العبارة خاطئة لأن $G$ زمرة حيث أنها $|G| = 13$

أي أن $m = 1 < 13$ و $n = 1 \in \mathbb{Z}^+$ ولاحظ أن $G$ بسيطة لأن رتبتها عدد أولي $p = 13$

فلو فرضنا أي $H \leq G$ لحصلنا حسب لاجرانج $|H| \mid 13 \Rightarrow$ $|H| = 13$ ، $|H| = 1$

أي أن $G$ بسيطة ∴ توجد زمرة بسيطة تحقق معطى الفقرة

~~مثال آخر بسيطة حيث $A_4$ ، $p = 3$ ، $m = 4$~~

~~مثال آخر حيث $A_n$ ... بسيطة~~

جـ ب: ٢:

العبارة خاطئة لأنه لو فرضنا جدلاً ~~وجود زمرة~~ ~~مسألة~~ صحة العبارة أي:

$\exists H ; \quad H \leq G \wedge |H| = 72 \wedge |G| = 360$ ٣

$[G:H]$

عندئذ يلزم أن $5 = \frac{360}{72} = $ أو يجب مبرهنة كايلي المعممة

$A(S) \ni 72 \quad |A(S)| = 5!$

يوجد تشاكل $\psi : G \to S = \{Hx ; x \in G\}$

نواته أكبر زمرة جزئية ناظمية في $G$ ومحتواة في $H$

ولنفرض جدلاً أن $Ker = \{e\}$ أي أن

$\leq \psi(G) \cong G/\{e\} \cong G \Rightarrow$ $\underbrace{|G| \mid |S|}_{\text{حسب لاجرانج}}$

$|S| = 5!$ لكن $|G| = 360$ لا يمكن أن تكون $\{e\}$ $Ker_\psi \neq \{e\}$

∴ $Ker_\psi \neq \{e\}$ أي أنه توجد زمرة جزئية ناظمية في $G$ لا تساوي $G$ لأن $\underbrace{Ker \subseteq H \subset G}_{|H| < |G|}$ معطى

وليست تافهة ⇐ $G$ غير بسيطة تناقض ① ومنه لا نعتبر التناقض

إلا بنقض الفرض أي أنه لا توجد زمرة جزئية من $G$ رتبتها 72

① مع المعطى وهو كونها بسيطة

لا يكتب في هذا الهامش

ج) ب 3: العبارة صائبة لأن

لاحظ أن: $T_g : G \to G$ وأيضاً $I : G \to G$

تعريف $T_g$ $\forall g \in G, x \in G: \quad xT_g = g^{-1}xg$

$= (g^{-1}g)x$ لأنها إبدالية وتجميعية

$= ex$ خاصية النظير

$= x$ المحايد

$= xI = xT_e$ تعريف $I$، $T_e$

وحيث أن المجال والمجال المقابل لـ $T_g$ و $I$ ~~المرافق~~ هو $G$

والتطبيقات صورة العنصر تحت تأثير $T_g$ مع صورة العنصر تحت تأثير $I$

فإن $Inn(G) = \{I\}$ أي أن $I = T_g$ لكل $g \in G$

$\Rightarrow |Inn(G)| = 1$ □

ج 4: أ) أ: إذا كانت: (1)

$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$

بحيث أن $\forall a_i, b_i \in G_i: (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$= (a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n) \in G$

ج 4: أ- إذا كانت $G_i \triangleleft G$ لكل $1 \le i \le n$

$G = G_1G_2 \cdots G_n$

ب- كل عنصر من $G$ يكتب بطريقة وحيدة:

مثلاً $g$

$g = g_1g_2 \cdots g_n \quad ; \quad g_i \in G_i \wedge 1 \le i \le n$

ج 4: ج) لنفرض أن $a \in G_i \cap G_j$ وبما أن كل ~~عنصر يكتب بطريقة وحيدة~~ $a = e_1 \cdots a e_{i+1} \cdots e_n$

لأن $a \in G_i$ $\Rightarrow a = e_1 e_2 \cdots a e_{i+1} \cdots e_n$

$a \in G_j$ $= e_1 e_2 \cdots e_i \, a \, e_{j+1} \cdots e_n$

وبما أن كل عنصر يكتب بطريقة وحيدة و $i \ne j$ وعند تساوي العنصرين

فإن العناصر المتقابلة تتساوى أي أن

$a = e_i \wedge a = e_j \Rightarrow a = e$ العنصر المحايد $= e_1e_2 \cdots e_n$

$\forall i \ne j$

لكل $i \ne j$ $\Rightarrow G_i \cap G_j = \{e\}$

لا يكتب في
هذا الهامش

س4 : ج : 2 : لاحظ أن :

لأن $G_j \trianglelefteq G$ $\quad aba^{-1} \in G_j$

لأن $G_j$ زمرة $\quad \Rightarrow aba^{-1}b^{-1} \in G_j$

بالمقابل :

لأن $G_i \trianglelefteq G$ $\quad ba^{-1}b^{-1} \in G_i$

$G_i$ زمرة $\quad \Rightarrow aba^{-1}b^{-1} \in G_i$

$\therefore$ نجد أن $aba^{-1}b^{-1} \in G_i \cap G_j$ و $j \neq i$

$\Rightarrow$ حسب نظرية سابقة أن $aba^{-1}b^{-1} = e$ وذلك في الفقرة (1) في نفس السؤال

~~$\Rightarrow ab = ba$~~

بالضرب في اليمين $ba$ $\quad \Rightarrow aba^{-1}b^{-1}ba = ba$

$\Rightarrow ab = ba$

3 خاصية التجميع خاصية النظير خاصية المحايد

4

س4 : د :

مثلات أصناف التكافؤ هي :

$\mathbb{Z}_{12}$ , $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ , $D_6$ , $A_4$ , $K$

حيث أن $K = \langle a, b ; a^4 = b^3 = e , b^{-1}ab = a^{-1}b \rangle$

انتهت الاجابات