بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود / الرياض — الاختبار النهائي — في المقرر ٣٤٣ ريض

كلية العلوم / قسم الرياضيات — الفصل الدراسي الثاني ١٤٣٥/١٤٣٦ هـ — الزمن : ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س١ : (أ) إذا كان $x \in G$ ، فعرِّف رتبة x . 12

(ب) متى نقول إن $G = < x, y >$ زمرة زوجية رتبتها $2n$ ؟

(جـ) متى نقول إن H زمرة سيلو جزئية من النوع p في زمرة منتهية G ؟

(د) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :-

(١) إذا كانت G منتهية وكان $y \in G$ فإن $y^{|G|} = e$.

(٢) لا توجد زمرة إبدالية G رتبتها p^n ، حيث $n \geq 2$.

(٣) إذا كان $g \in G$ وعرّفنا التطبيق $T_g : G \to G$ بالقاعدة :

$xT_g = gxg^{-1}$ ، فإن : $T_{gh} = T_g T_h$ ، حيث $g, h \in G$.

(هـ) إذا كان $\phi : G \to \bar{G}$ تشاكلاً نواته K فاملأ الفراغات الآتية :-

(i) $G/K \cong \cdots$ (ii) $H \leq G \Rightarrow \phi(H) = \{\cdots\cdots\} \leq \cdots$

س٢ : (أ) إذا كانت $G|_S$ (G تؤثر على S) وكانت $|G| = p^n$ و S منتهية ، 12

فأجب عما يأتي :-

(١) املأ الفراغ : $S_G = \{\cdots\cdots\}$.

(٢) أثبت أن :

$|S| \equiv |S_G| (\text{mod } p)$

(ب) إذا كانت G منتهية وكانت A و B زمرتي سيلو جزئيتين من النوع p في G فأثبت أنهما مترافقتان في G .

(جـ) إذا كانت G زمرة غير إبدالية وكان $a, b \in G$ بحيث $|ab| = n$ فأثبت أن $|ba| = n$ أيضاً .

س٣ : إذا كان $g = (g_1, g_2, g_3) \in G = U_{20} \times \mathbb{Z}_{12} \times A_6$ ، حيث : 16

$g_1 = 3$ ؛ $g_2 = 2$ ؛ $g_3 = (1,2,3,5)(3,4,5)(3,6)$

فأجب عما يأتي :-

(أ) املأ الفراغات الآتية :

(i) $|g| = \cdots$ (ii) $Aut(<g>) \cong \cdots$ (iii) $e = \cdots$ (iv) $g^{-1} = \cdots$

(v) $|A_6| = \cdots$ (vi) $|\mathcal{D}(<g>)| = |Inn(<g>)| = \cdots$ (vii) $|G| = \cdots$

(ب) إذا علمت أن A_n زمرة بسيطة من أجل $n \geq 5$ ، فأثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :-

(١) توجد $H < A_6$ بحيث $|H| = 90$.

(٢) توجد $K_1, K_2 < A_6$ بحيث $|K_1| = |K_2| = 9$ ، ولكن $K_1 \neq K_2$.

(٣) إن $A_3 \geq 10$ = عدد زمر سيلو الجزئية في A_6 من النوع 3 .

« أسأل الله لكم التوفيق »

هذا الهامش

إجابة السؤال الأول :

أ) ليكن $x \in G$ ، نعرف رتبة x على أنها أصغر عدد صحيح موجب n يحقق $x^n = e$ (حيث e هو المحايد في G) ونرمز له بالرمز $|x|$ ، وإذا لم يوجد عدد صحيح موجب n يحقق $x^n = e$ ، فإننا نقول أن رتبة x لا نهائية.

ب) إذا كان $|y| = n$ و $|x| = 2$ و $x^{-1}yx = y^{-1}$

أي :

$$G = \langle x, y \mid |x| = 2, |y| = n, x^{-1}yx = y^{-1} \rangle .$$

ج) إذا كانت $|G| = p^n m$ حيث $n, m \in \mathbb{Z}^+$ و $p \nmid m$ ، فإننا نقول أن $H \leq G$ زمرة سيلو جزئية من النوع p إذا كانت $|H| = p^n$.

د)

1) صائبة .

لنعتبر الزمرة $\langle y \rangle$ ، بما أن $\langle y \rangle \leq G$ ، فحسب نظرية لاجرانج

لدينا $|\langle y \rangle| \mid |G|$.

ولكن $|\langle y \rangle| = |y|$ ، إذاً $|y| \mid |G|$.

إذاً يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ يحقق $|G| = k|y|$ ، وعليه لدينا

بالتعويض $\quad y^{|G|} = y^{k|y|}$

خواص الأسس $\quad = (y^{|y|})^k$

تعريف الرتبة $\quad = e^k$

خواص المحايد $\quad = e$.

هذا الهامش

(٢) خاطئة.

الزمرة $(\mathbb{Z}_{p^n}, +)$ إبدالية ورتبتها p^n . [illegible]

(٣) خاطئة

~~$\forall x \in G: x T_{gh} = x(T_g T_h)$~~

~~$= (x T_g) T_h$~~

~~$= (g x g^{-1}) T_h$~~

~~$= h(g x g^{-1}) h^{-1}$~~

~~$= (hg) x (g^{-1} h^{-1})$~~

(٣) خاطئة.

لأن:

$\forall x \in G: \quad x T_{gh} = (gh) x (gh)^{-1}$ تعريف T_{gh}

$= (gh) x (h^{-1} g^{-1})$ نظرية

$= g (h x h^{-1}) g^{-1}$ التجميع

$= (h x h^{-1}) T_g$ تعريف T_g

$= (x T_h) T_g$ تعريف T_h

$= x (T_h T_g)$ تعريف تركيب تطبيقين

إذاً: $\boxed{T_{gh} = T_h T_g} \neq T_g T_h$.

هذا الهامش

علينا: $T_{hg} = T_g T_h$

إذاً، لنثبت كون $T_{gh} \neq T_g T_h$، علينا إثبات أن $T_{gh} \neq T_{hg}$.

(أي سنوجد $g, h \in G$ بحيث $T_{gh} \neq T_{hg}$ لنثبت أن المساواة لا تتحقق عموماً)

لنفرض أن $G \neq S_3$ ~~...~~ لنفرض أن $\forall h, g \in G: T_{gh} = T_{hg}$

إذاً من تعريف T_{gh} و T_{hg} يكون لدينا: $\forall x \in G: (gh)x(gh)^{-1} = (hg)x(hg)^{-1}$

إذاً:

$$\forall x \in G: (gh)x(gh)^{-1} = (hg)x(hg)^{-1}$$

~~$\iff (gh)x(h^{-1}g^{-1}) = (hg)x(g^{-1}h^{-1})$~~

$$\iff (hg)^{-1}(gh)x(gh)^{-1}(hg) = (hg)^{-1}(hg)x(hg)^{-1}(hg)$$
(بالضرب يساراً بـ $(hg)^{-1}$ و (hg) على التوالي)

$$\iff (hg)^{-1}(gh)x(gh)^{-1}(hg) = ((hg)^{-1}(hg))\,x\,((hg)^{-1}(hg))$$
(التجميع)

$$\iff (hg)^{-1}(gh)x(gh)^{-1}(hg) = e\,x\,e$$
(خاصية النظير)

$$\iff (hg)^{-1}(gh)x(gh)^{-1}(hg) = x$$
(خاصية الحياد)

$$\iff ((hg)^{-1}(gh))\,x\,((gh)^{-1}(hg)) = x$$
(خاصية التجميع)

$$\iff ((hg)^{-1}(gh))\,x\,((hg)^{-1}(gh))^{-1} = x$$
(مبرهنة)

لكن $z = (hg)^{-1}(gh)$ فعندئذ:
$z x z^{-1} = x$
$\Rightarrow (z x z^{-1})z = xz$ (بالضرب يميناً بـ z)
$\Rightarrow z x (z^{-1} z) = xz$ (التجميع)
$\Rightarrow z x e = xz$ (خاصية النظير)
$\Rightarrow zx = xz$ (خاصية الحياد)

$$(*) \quad \iff (hg)^{-1}(gh) \in Z(G)$$
(تعريف $Z(G)$)

~~$\iff \exists z \in Z(G): (hg)^{-1}(gh) = z$~~

~~$\iff (hg)(hg)^{-1}(gh) = (hg)z$ (بالضرب يساراً بـ (hg))~~

~~$\iff ((hg)(hg)^{-1})(gh) = (hg)z$ (التجميع)~~

~~$\iff e(gh) = (hg)z$ (خاصية النظير)~~

~~$\iff gh = (hg)z$ (خاصية الحياد)~~

~~$\iff gh \in (hg)Z(G)$ (تعريف الانتماء)~~

~~$\iff (gh)Z(G) = (hg)Z(G)$ (لأن المجموعات المشاركة اليسرى إما متطابقة أو منفصلة)~~

~~ولكن بما أن $Z(G)$ زمرة جزئية ابدالية من G فإنها ناظمية في G، وبما أن~~

~~$\forall g,h \in G: \; (gh)Z(G) = (gh)Z(G)$ (بدلالة الخطوات السابقة)~~
~~فإن $G/Z(G)$ ابدالية.~~

~~بما أن G منتهية فيوجد عدد منته من عناصر $G/Z(G)$، ولتكن $a_1, a_2, \dots, a_n$.~~

~~بما أن $a_1Z(G), a_2Z(G), \dots, a_nZ(G)$ أصناف تكافؤ في G، فإن أي عنصر $g \in G$~~
~~يوجد $i \in \{1,2,\dots\}$ بحيث $g \in a_iZ(G)$ وبالتالي يوجد $z \in Z(G)$ بحيث $g = a_i z$~~

~~ليكن $g,h \in G$، فيوجد~~

بما أن $Z(G)$ زمرة جزئية ابدالية من G فإن $Z(G) \trianglelefteq G$.
بما أن $G=S_3$ فإن الزمرة الناظمية الوحيدة غير البديهية هي $\{(1),(1,3,2),(1,2,3)\}$.

ولكن $(1,2,3) \notin Z(G)$ لأن:

$$(1,2)(1,2,3) = (1,3) \neq (2,3) = (1,2,3)(1,2)$$

إذاً $Z(G) = \{e\}$

من (*) نجد أن

$$\forall g,h \in G: \quad (hg)^{-1}(gh) = e$$

$\Longleftrightarrow \; (hg)(hg)^{-1}(gh) = (hg)e$ (بالضرب من اليسار بـ (hg))

$\Longleftrightarrow \; ((hg)(hg)^{-1})(gh) = hg$ (بالتجميع بخاصية التجميع)

$\Longleftrightarrow \; e(gh) = hg$ (خاصية النظير)

$\Longleftrightarrow \; gh = hg$ (خاصية المحايد)

ولكن هذا تناقض كون $G=S_3$ غير ابدالية !!!

هذا الهامش

إذا أ $T_{gh} \neq T_g T_h$ محموعة

هـ

$i)$ $G/K \cong \varphi(G)$

$ii)$ $H \leq G \Rightarrow \varphi(H) = \{x \in \bar{G} \mid x = \varphi(h) \wedge h \in H\} \leq \bar{G}$

إجابة السؤال الثاني:

أ

$S_G = \{x \in S \mid xg = x \quad \forall g \in G\}$.

نعلم أن المجموعات xG ، $x \in G$ أصناف تكافؤ .

لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ممثلات لأصناف التكافؤ هذه ، فلدينا

$$|S| = \sum_{i=1}^{k} |x_i G|$$

ولنفرض - بدون إخلال بالعمومية - أن العناصر $x_1, \ldots, x_t$ هي العناصر التي تحقق $x_i G = \{x_i\}$ $\forall\, 1 \leq i \leq t$.

فيكون لدينا :

$$|S| = |S_G| + \sum_{i=t+1}^{k} |x_i G|.$$

هذا الهامش

ولكن $|x_iG| = \frac{|G|}{|G_{x_i}|}$ (من هنا) عدد صحيح أي

$\frac{|G|}{|G_{x_i}|} \mid |G| = p^n$.

فإن $|x_iG| = \frac{|G|}{|G_{x_i}|} = p^{n_i}$ و $n_i \geq 0$ حيث $n_i \in \mathbb{Z}$.

إذا كان $t+1 \leq i \leq k$ فإن $n_i \geq 1$ لأن $|x_iG| > 1$.

إذاً: $p \mid |x_iG| \quad \forall\ t+1 \leq i \leq k$.

إذاً $p \mid \sum_{i=t+1}^{k} |x_iG|$

ولكن $\sum_{i=t+1}^{k} |x_iG| = |S| - |S_G|$

إذاً:

$p \mid |S| - |S_G|$

$\Longleftrightarrow |S| \equiv |S_G| \pmod{p}$.

(ب) لتكن $R = \{Ax \mid x \in G\}$

ولنعرّف $B|_R$ بـ $\forall t \in B: ((Ax)t) = A(xt)$

~~بما أن A زمرة جزئية سيلو من النوع p من G فإن~~ $\cancel{p \nmid [G:A]}$

وبما أن B زمرة-p من G فإن

$|R| \equiv |R_B| \pmod{p}$.

وبما أن A زمرة جزئية سيلو من النوع p من G فإن $p \nmid [G:A] = |R|$

إذاً: $p \nmid |R_B|$

إذاً: $|R_B| \neq 0 \Longleftrightarrow R_B \neq \emptyset$

لتكن $Am \in R_B$.

هذا الهامش

إذاً: $$\forall t \in B:\quad (Am, t) = Am$$

(تعريف التأثير) $$\Leftrightarrow A(mt) = Am$$

(بالضرب يميناً بـ m^{-1}) $$\Leftrightarrow (A(mt))m^{-1} = (Am)m^{-1}$$

(التجميع) $$\Leftrightarrow A(mtm^{-1}) = A(mm^{-1})$$

(خاصية النظير) $$\Leftrightarrow A(mtm^{-1}) = Ae$$

(خاصية المحايد) $$\Leftrightarrow A(mtm^{-1}) = A$$

(لأن A زمرة) $$\Leftrightarrow mtm^{-1} \in A$$

(لأن العلاقة صحيحة لكل $t \in B$) $$\Leftrightarrow mBm^{-1} \subseteq A$$

ولكن $$|mBm^{-1}| = |A|$$

إذاً: $$mBm^{-1} = A$$

إذاً: A، B مترافقتان في G

ج)

لدينا:

$$(ab)^{n+1} = \underbrace{(ab)(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n+1 \text{ مرة}}$$

(التجميع) $$= a\overbrace{(ba)(ba)(ba)\cdots(ba)}^{n \text{ مرة}}b$$

$$= a(ba)^n b$$

إذاً: $$(ab)^{n+1} = a(ba)^n b \quad \ldots (\#)$$

ولكن $|ab| = n$، إذاً:

(خواص الأسس) $$(ab)^{n+1} = (ab)^n(ab)$$

(تعريف الرتبة) $$= e(ab)$$

(خاصية المحايد) $$= ab$$

بالتعويض في (##) يكون لدينا :

$$ab = (ab)^{n+1} = a(ba)^n b$$

$$\Longrightarrow a^{-1}(ab)b^{-1} = a^{-1}(a(ba)^n b)b^{-1}$$

(بالضرب يميناً وشمالاً بـ b^{-1} و a^{-1} على التوالي)

$$\Longrightarrow (a^{-1}a)(bb^{-1}) = (a^{-1}a)(ba)^n(bb^{-1})$$ (التجميع)

$$\Longleftrightarrow (e)(e) = e\,(ba)^n\,e$$ (خاصية النظير)

$$\Longleftrightarrow e = (ba)^n$$ (خاصية المحايد) .

إذاً : إذا كان $|ab| = n$ ، فإن $(ba)^n = e$ ، وبالتالي :

$$|ba| \le n$$

لنفرض لغرض التناقض أن $|ba| < n$ وليكن t .

فبنفس طريقة النقاش أعلاه (فقط استبدال a بـ b و b بـ a) نجد أن

$$|ab| \le t < n$$

ولكن $|ab| = n$ ، وهذا تناقض !!

إذاً : $|ba| = n$.

تم [illegible]

هذا الهامش

إجابة السؤال الثالث:

(أ)

(٢)

ii)

لدينا:

$|g_1| = 4$

لأن:

$3^1 \equiv 3 \not\equiv 1 \pmod{20}$

$3^2 \equiv 9 \not\equiv 1 \pmod{20}$

$3^3 \equiv 27 \equiv 7 \not\equiv 1 \pmod{20}$

$3^4 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{20}$

و

$|g_2| = 6$

لأن:

~~2 = 2 ≢~~

$2 \not\equiv 0 \pmod{12}$

~~$2^2 \not\equiv$~~

$2^2 \equiv 4 \not\equiv 0 \pmod{12}$

$2^3 \equiv 6 \not\equiv 0 \pmod{12}$

$2^4 \equiv 8 \not\equiv 0 \pmod{12}$

$2^5 \equiv 10 \not\equiv 0 \pmod{12}$

$2^6 \equiv 12 \equiv 0 \pmod{12}$

(ملاحظة: الأس بالأحرى بالنسبة لعملية الجمع).

و

$|g_3| = 4$

لأن:

~~$g_3 = (1, 2, 4, 5, 6, 3$~~

~~$g_3 = (1, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 3$~~

$g_3 = (1, 2, 4, 5)(3, 6)$

فيكون

$|g_3| = lcm\,[\,|(1,2,4,5)|, |(3,6)|\,] = lcm\,[4, 2] = 4.$

إذاً:

$|g| = lcm\,[\,|g_1|, |g_2|, |g_3|\,] = lcm\,[4, 6, 4] = 12.$

هذا الهامش

ii)

$Aut(\langle g \rangle) \cong U_{12}$

لأن $|\langle g \rangle| = 12$ و $\langle g \rangle$ دائرية.

iii) $e = (1, 0, (1))$

iv) $g^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1}, g_3^{-1})$

$= (7, 10, (3,6)(1,5,4,2))$.

v) $|A_6| = \frac{6!}{2} = 360$.

vi) $|j(\langle g \rangle)| = |Inn(\langle g \rangle)| = 1$

لأن $\langle g \rangle$ [illegible] دائرية، وبالتالي ابدالية.

vii) $|G| = |U_{20}||Z_{12}||A_6|$

$= (\varphi(20))(12)(\frac{6!}{2})$

$= (8)(12)(360)$

$= 34560$.

ب

1) عبارة خاطئة.

لنفرض ~~[illegible]~~ جدلاً وجود زمرة H جزئية من A_6 بحيث $|H| = 90$

فلدينا $[A_6 : H] = \frac{|A_6|}{|H|} = \frac{360}{90} = 4$ / $\cancel{[G:H] = \frac{|A_6|}{|H|}}$

هذا الهامش

لتكن $S = \{Hx \mid x \in A_6\}$.

مثلثيا

من تعميم نظرية كيلي ، يوجد تشاكل $\varphi : A_6 \to A(S)$ بحيث

أن K_φ هو أكبر زمرة جزئية ناظمية في A_6 ومحتواة

في H .

بما أن A_6 بسيطة ، وكون $K_\varphi \trianglelefteq A_6$ و $K_\varphi \leq H < A_6$ فإن

$K_\varphi \triangleleft A_6$ ، وبالتالي $K_\varphi = \{e\}$.

إذاً ، من نظرية التماثل الأولى:

$$A_6 \cong A_6/\{e\} \cong A_6/K_\varphi \cong \varphi(A_6) \leq A(S)$$

إذاً:
$$A_6 \cong \varphi(S) \leq A(S)$$

بما أن $A_6 \cong \varphi(S)$ ، فإن $|A_6| = |\varphi(A_6)|$

ومن نظرية لاجرانج لدينا $|\varphi(A_6)| \mid |A(S)|$ ، لأن $\varphi(A_6) \leq A(S)$

إذاً
$$|A_6| \mid |A(S)|$$

ولكن
$$|A_6| = 360 \nmid 24 = |A(S)|$$

إذاً: لا توجد زمرة جزئية H من G رتبتها 90 .

صاحبة

بما أن
$$|A_6| = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

فإن زمرة سيلو من النوع 3 رتبتها $3^2 = 9$.

من مبرهنة سيلو الأولى توجد زمرة $K_1 < A_6$ و $|K_1| = 9$ ، ومن

نظرية سيلو الثالثة $S_3 = 1 + 3q$ حيث $q \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

إذا كان $q = 0$ ، فهذا يعني أن $S_3 = 1$ ، وبالتالي $K_1 \triangleleft A_6$ ، وهذا يناقض

كون A_6 بسيطة.

إذاً $q \geq 1$ وبالتالي $S_3 \geq 1 + 3 = 4$ ، فتوجد زمرة أخرى $K_2 \neq K_1$ تحقق

$|K_2| = 9$.

خاطئة : $|A_6| \not\mid 40 = 1 + 3 \times 13 = S_3 \Leftarrow$ قد تكون العدد

البرهان

3

أولاً: لتكن σ و τ [redacted] دورتان منفصلتان، نثبت أن $\tau\sigma = \sigma\tau$

[redacted]

لتكن $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ و $\tau = (j_1, j_2, \dots, j_r)$.

[redacted]

لتكن $x \in G$.

إذا كان $x \neq i_t$ $1 \le t \le n$ $\forall$ و $x \neq j_\ell$ $\forall 1 \le \ell \le r$ فإن

$$x(\tau\sigma) = (x\tau)\sigma = x\sigma = x$$

تعريف ضرب تبديلتين

لأن $x \neq j_\ell$

لأن $x \neq i_t$

[redacted]

وبالمثل:

تعريف ضرب تبديلتين

لأن $x \neq i_t$

لأن $x \neq j_\ell$

$$x(\sigma\tau) = (x\sigma)\tau = x\tau = x$$

إذاً $x(\tau\sigma) = x(\sigma\tau)$ في هذه الحالة.

إذا كان x ينتمي إلى إحدى الدورتين ولنفرض بدون إخلال بالعمومية أنها σ فيكون $x = i_t$ لقيمة ما $1 \le t \le n$.

ولكن $x \neq j_\ell$ $\forall 1 \le \ell \le r$ لأن σ و τ منفصلتان.

إذاً:

تعريف ضرب تبديلتين

$$x(\tau\sigma) = (x\tau)\sigma = x\sigma = i_t\sigma = i_{t+1}$$

لأن $x \neq j_\ell$

بالتعويض

تعريف σ

تعريف ضرب تبديلتين

بالتعويض

تعريف σ

لأن σ و τ منفصلتان

$$x(\sigma\tau) = (x\sigma)\tau = (i_t\sigma)\tau = i_{t+1}\tau = i_{t+1}$$

إذاً: $\sigma\tau = \tau\sigma$

(ملاحظة: إذا كان $t = n$ فإن $i_{n+1} = i_1$).

ثانياً: الحل:

مما سبق نجد أن أي [redacted] دورتين $(a,b,c), (f,g,h)$ حيث a,b,c,f,g,h مختلفات تتبادل.

إذاً الزمرة المولدة بـ (a,b,c) و (f,g,h) عناصرها بالشكل $(a,b,c)^i (f,g,h)^j$ وجميعها مختلفة فلو كان

$(a,b,c)^i (f,g,h)^j = (a,b,c)^{i'} (f,g,h)^{j'}$ لكان

$(a,b,c)^{i-i'} = (f,g,h)^{j'-j}$

ولكن (a,b,c)، (f,g,h) منفصلتان، فيكون $i = i'$ و $j = j'$.

[redacted] ومنه يكون رتبة الزمرة $\langle (a,b,c),(f,g,h) \rangle$ هي $9 = (3)(3)$.

ولدينا $\binom{6}{3}$ زمرة من هذا النوع (اختيار 3 عناصر من 6 عناصر للدورة الأولى والثانية تشغل مرة). ولكن $20 = \binom{6}{3}$. إذاً العدد المطلوب