بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود / الرياض
كلية العلوم / قسم الرياضيات

الاختبار النهائي في المقرر ٣٤٣ ريض
الفصل الدراسي الثاني ١٤٣٦/ ١٤٣٧ هـ الزمن : ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س١ : إذا كان $G = S_{13} \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{13}^{*}$ ، $g = (g_1, g_2, g_3) \in G$ حيث :
$g_1 = \sigma = (1,4,6,8)(2,5,6,13)(7,9,10)$
$g_2 = 6$ ؛ $g_3 = 5$
فأجب عما يأتي :-
(أ) اكتب $\sigma = g_1$ كحاصل ضرب تبديلات منفصلة وعين التجزيء الدوري لـ σ .
(ب) املأ الفراغات الآتية :-
(i) $e = (e_1, e_2, e_3) = \cdots\cdots$
(ii) $g^{-1} = (\sigma^{-1}, g_2^{-1}, g_3^{-1}) = \cdots\cdots$
(iii) $|g| = |\langle g \rangle| = \cdots$ (iv) $Aut(\langle g \rangle) \cong \cdots$ (v) $\sigma \cdots A_{13}$
(vi) $|N(\sigma)| = \cdots$
(ج) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :-
(١) توجد زمرة جزئية في S_{13} رتبتها 1500 .
(٢) توجد زمرة جزئية في S_{13} رتبتها 60 .
(٣) إن $\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$.
(٤) إن : $C_\sigma = \frac{|S_{13}|}{124}$ = عدد مرافقات σ في S_{13} .

س٢ : (أ) إذا كانت $H_1, \dots, H_n \leq G$ فأثبت أن : $H = \bigcap_{i=1}^{n} H_i \leq G$
(ب) إذا كانت $L = \{G \mid |G| = 8\}$ وعرفنا علاقة التماثل «$\cong$» على L ، فعين ممثلات أصناف التكافؤ المرافقة لـ «$\cong$» .

س٣ : (أ) متى نقول إن G زمرة غير بسيطة ؟
(ب) أثبت أنه لا توجد زمرة جزئية H في G إذا كانت G زمرة بسيطة رتبتها 60 و $|H| = 15$.
(ج) أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة G رتبتها 154 .

س٤ : (أ) إذا كانت G زمرة منتهية ، متى نقول إن H زمرة سيلو جزئية في G من النوع P ؟
(ب) متى نقول إن G هي حاصل الضرب المباشر الداخلي للزمر $M_1, \dots, M_n$ ؟
(ج) إذا كانت G هي حاصل الضرب المباشر الداخلي للزمر $M_1, \dots, M_n$ وكانت $D = M_1 \times \cdots \times M_n$ فأثبت أن : $D \cong G$.

هذا الهامش

سؤال: (أ)

٢

$g_1 = \sigma = (1,4,6,8)(2,5,6,13)(7,9,10) \in S_{13}$

الجواب:

$\sigma = (1,4,13,2,5,6,8)(3)(7,9,10)(11)(12)$

$6 + 2 = 8$

التفريق الدوري لـ σ هو $\Longleftarrow$ $\{1,1,1,3,7\}$

$|\sigma| = 21$

سؤال: (ب)

٦

(i) $e = (e_1, e_2, e_3) = ((1), 0, 1)$ 1

$(1) \in S_{13}$, $0 \in Z_8$, $1 \in Z_{13}^{*}$

(ii) $g^{-1} = (\sigma^{-1}, g_2^{-1}, g_3^{-1})$

$= ((8,6,5,2,13,4,1)(10,9,7), 2, 8)$ 1

$g_2^{-1} = 2$

$g_2^{-1} g_2 = 2+6$

$= 0$ مقياس 8

(iii) $|g| = |\langle g \rangle| = [|g_1|, |g_2|, |g_3|]$

$\Longleftarrow$ حسابها في الهامش

$= [21, 4, 4]$

$= [21, [4,4]] = [21, 4] = 84$ 1

$21 = 3 \cdot 7$, $(21,4) = 1$

(iv) $Aut(\langle g \rangle) \cong U_{84}$ 1

$A_{13} = \{\sigma \in S_{13} \mid \sigma \text{ زوجي}\}$

(v) $\sigma \in A_{13}$ 1

$\sigma = (1,4,13,2,5,6,8)(7,9,10)$

عدد منقولاتها هي

$6 + 2 = 8$ زوجي

(vi) $|N(\sigma)|$

$= 1 \cdot |S_3| \cdot 3|S_1| \cdot 7|S_1|$

$= 3! \cdot 3 \cdot 7 = 6 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 2 \cdot 7 = 126$ 1

$3, 8, 7 / 126$

هذا الهامش

س أ (1): $|S_{13}| = 13! = 13 * 12 * 11 * 10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1$

(أ)

$= 2^{10} * 3^{4} * (11 \cdot 13 \cdot 5^{2} * 7 * 1)$

$= 2^{10} * 3^{4} * (11 \cdot 13 \cdot 5^{2} * 7 \cdot 1)$

$= 2^{10} * 3^{4} * 5^{2} * (11, 13, 7, 1)$

1001

لكن

$1500 = 2^{2} \cdot 3 \cdot 5^{3} \nmid |S_{13}| = 13!$

$5^{3} \nmid 13!$

من مبرهنة لاجرانج فإنه لا توجد زمرة جزئية في S_{13} رتبتها 1500

لأن $1500 \nmid |S_{13}| = 13!$

$1\frac{1}{2}$

∴ العبارة خاطئة.

س ب (2) العبارة صائبة لأن:

$60 = 6 * 10 = 2 * 3 * 2 * 5 = 2^{2} * 3 * 5$

$60 = 4 * 15 = 4 * 3 * 5$

لو أخذنا $\sigma \in S_{13}$ حيث

$\sigma = (1,2,3,4)(5,6,7)(8,9,10,11,12) \in S_{13}$

$|\sigma| = l.c.m [4, 3, 5] = [4, 15] = 60$

وبالتالي فإن $H = \langle \sigma \rangle = \langle (1,2,3,4)(5,6,7)(8,9,10,11,12) \rangle$

$|H| = |\langle \sigma \rangle| = 60$ حيث

$1\frac{1}{2}$

(من مبرهنة) $\sigma \in S_{13}$ فإن $\langle \sigma \rangle \leq S_{13}$

$|\langle \sigma \rangle| =$ ~~l.c.m [4, ...]~~

لأن أي زمرة مولدة بعنصر من S زمرة جزئية في S ...

هذا الهامش

س : هـ (٢) :

العبارة صائبة لأننا *الطريقة الأولى*

$Z_3 \times Z_7$ زمرة دائرية لأن $(3,7)=1$ ورتبتها 21

لنوجد زمرة دائرية في S_{13} مولدة بعنصر في S_{13}

وهو حاصل ضرب تبديلتين واحدة طولها 3 والأخرى 7

ليكن :

$$\sigma \in S_{13}$$

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6,7,8,9,10)(11)(12)(13)$$

$$|\sigma| = 21 = [3,7]$$ مضاعف مشترك أصغر

$H = \langle \sigma \rangle$ حيث $|H| = |\langle \sigma \rangle| = 21$

$$H = \langle (1,2,3)(4,5,6,7,8,9,10) \rangle$$

بـ $\langle \sigma \rangle$ زمرة دائرية رتبتها 21 وأيضا $Z_3 \times Z_7$

دائرية رتبتها 21 من مبرهنة أي زمرتين دائريتين لهما نفس الرتبة فهما متماثلتين أي $\langle \sigma \rangle \cong Z_3 \times Z_7$

* الطريقة الأخرى* بـ $|\langle \sigma \rangle| = 21$

ولدينا $\langle \sigma \rangle$ زمرة دائرية رتبتها 21 .

وأيضا $Z_3 \times Z_7$ زمرة دائرية رتبتها 21

لأن $(3,7)=1$

من مبرهنة فإنه

$$\langle \sigma \rangle \cong Z_{21} \quad \text{و} \quad Z_{21} \cong Z_3 \times Z_7$$

بـ علاقة التكافؤ تناظرية ومتعدية فإنه

$$\langle \sigma \rangle \cong Z_3 \times Z_7$$

هذا الهامش

س ١ : ج (4) ، ايجاد مرافقات 6 هي حسب مبرهنة

$$C_\sigma = \frac{|S_{13}|}{|N(\sigma)|} = \frac{13!}{126}$$

مثلا (P) فإنه

$|N(\sigma)| = 126$ وبالتالي $C_\sigma = \frac{|S_{13}|}{126} = \frac{13!}{126}$

هذه العبارة خاطئة ✓

$\sigma = (1,4,13,2,5,6,8)(7,9,10)(11)(12)(3)$

$1\frac{1}{2}$

التوزيع الدوري $\{1,1,1,3,7\}$

$|N(\sigma)| = 1 \cdot |S_3| \cdot 3 \cdot |S_1| \cdot 7 \cdot |S_1|$

$= 6 * 3 * 7$

$18 * 7 = 126$

$\begin{array}{r}{}^{5}18 \\ \times\ 7 \\ \hline 126\end{array}$

هذا الهامش

س: (D) إذا كانت فأثبت أن: $H = \bigcap_{i=1} H_i \leq G$

①

الجواب:

① $e \in H$

$\Rightarrow H \neq \cancel{\phi}$

المجاميع الجزئية لذاته H_i

$\cancel{H = \bigcap_{i=1} H_i}$

$\forall i \in n$ $e \in H_i$

$\Rightarrow e \in \bigcap_{i=1}^{n}$

②

صفر

٣/٦

هذا الهامش

س٢ (ب) ٤) $L = \{G \mid |G| = 8\}$

س٤

الجواب : ممثلات أصناف التكافؤ المرافقة لـ (L) هي :-

$G_1 = Z_8$, $G_2 = Z_2 \times Z_4$

$G_3 = D_4$, $G_4 = Q$ زمرة الرباعيات

الزمرة الزوجية

$G_5 = Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ ✓

انتهت إجابة س٢ ثم س

س ٤ (P) نقول عن G أنها غير بسيطة إذا كانت

تحتوي على زمرة جزئية ناظمية فعلية وغير تافهة أي

G غير بسيطة $\iff \exists N \lhd G \wedge N \neq \{e\}$

س ٤ (ب): الجواب G بسيطة رتبتها 60

بداية الحل ← نفرض جدلاً أنه $H \leq G$ حيث $|H| = 15$

$H < G \Rightarrow \exists\, S = \{Hx \mid x \in G\} \ni |S| = \frac{60}{15} = 4$

$\Rightarrow \exists\, A(S) \ni |A(S)| = 4! = 24$

ونتحقق أنه $|G| \nmid |A(S)|$

من تعميم مبرهنة كيلي: يوجد تشاكل $\theta : G \to A(S)$

نواته K_θ وهي أكبر زمرة جزئية ناظمية في G محتواة في H.

من مبرهنة التماثل الأساسية يكون لدينا

$\frac{G}{K_\theta} \cong \theta(G) \leq A(S)$

نفرض جدلاً أنه

θ متباين $\iff K_\theta = \{e\}$

$\frac{G}{K_\theta} = \frac{G}{\{e\}} \cong G \cong \theta(G) \leq A(S)$

من مبرهنة لاجرانج $|\theta(G)| \mid |A(S)|$

لأنه $G \cong \theta(G)$ $\Rightarrow |G| \mid |A(S)|$

وهذا تناقض ~~$|G| \nmid |A(S)|$~~

$\{e\} \neq K \lhd G$

منه $K_\theta \neq \{e\}$ وهي ناظمية في G أي

وهذا أيضاً تناقض مع كونه G زمرة بسيطة

جزئية

هذا الهامش

س٣ (جـ) $|G| = 154 = 2 * 7 * 11$

(٤) ① من مبرهنة سيلو الأولى يوجد على الأقل زمرة واحدة سيلو الجزئية من النوع 11 ورتبتها 11.

② من مبرهنة سيلو الثالثة فإن:

$a \in \mathbb{Z}$ $\quad S_{11} = 1 + 11a$

$a=0$: $1 \mid |G|$

$a=1$: $12 \nmid |G|$

$a=2$: $23 \nmid |G|$

∴ توجد H واحدة فقط من مبرهنة سيلو الثانية يكون لدينا

$\forall g \in G : g^{-1} H g = H \Rightarrow \{e\} \neq H \lhd G$

∴ G غير بسيطة

هذا الهامش

١٠

س (م) والجواب:

وإذا كانت G منتهية و $H \le G$ ، $|G| = p^n m$ ، $|H| = p^n$

و $p^{n+1} \not| \, |G|$ فإنه H زمرة سيلو الجزئية من النوع p . ٣

س (ب): نقول إن G حاصل الضرب المباشر الداخلي للزمر $M_1 \cdots M_n$

الجواب:

إذا كانت G منتهية و $M_1 \cdots M_n \le G$ التحقق

① $G = M_1 M_2 \cdots M_n$ ٣

② لكل عنصر في G يكتب بصورة وحيدة بالصيغة

$\forall g \in G$:

حيث $g = m_1 m_2 \cdots m_n$

$\forall m_i \in M_i$

س١١

$n \in Z$

س١٠

هذا الهامش

(٢،ج)

س٤: $G = M_1 \cdots M_n$, $D = M_1 \times \cdots \times M_n$ (ج.)

اثبت ان $D \cong G$ ؟

الجواب نعرف التطبيق

$$\phi : D \longmapsto G$$

كما يلي:

~~$\phi((m_1$~~

$$\phi((m_1,\ldots,m_n)) = m_1 \cdots m_n$$

(١) ان ϕ تشاكل لان:

$\forall (m_1,\ldots,m_n), (c_1,\ldots,c_n) \in D$:

$\phi((m_1,\ldots,m_n)(c_1,\ldots,c_n))$

$= \phi((m_1c_1,\ldots,m_nc_n))$ تعريف العملية في D

$= m_1c_1 m_2c_2 \cdots m_nc_n$ تعريف ϕ

$= m_1 \cdots m_n c_1 \cdots c_n$ لان اي عنصر فيها يكتب بصورة وحيدة

$= \phi((m_1,\ldots,m_n))\,\phi((c_1,\ldots,c_n))$ $a_i b_j = b_j a_i$ مبرهنة

∴ ϕ تشاكل

(٢) ان ϕ تباين لان $(b_1,\ldots,b_n), (a_1,\ldots,a_n) \in D \ni$

$\phi((b_1,\ldots,b_n)) = \phi((a_1,\ldots,a_n))$

$\Rightarrow b_1 \cdots b_n = a_1 \cdots a_n$ تعريف ϕ

$\Rightarrow b_i = a_i \quad \forall i$ (لماذا)

وبالتالي ϕ تباين

هذا الهامش

(٧)

اذن ϕ غامر لأن :

$\forall a_1, \dots, a_n \in G \ni \exists (a_1, \dots, a_n) \in D \ni \phi((a_1, \dots, a_n)) = a_1 \dots a_n$

تعريف ϕ

∴ ϕ ~~غ~~ غامر

من (1) و (2) و (3)

∴ ϕ تماثل وبالتالي $D \cong G$.

#

$\langle 6 \rangle = \{6, 6, 6, 6, 6 ---$

$= \{0, 6, 4, 2\}$

$|\langle 6 \rangle| = 4$

5
541
13
47
13
34
13
121
13
8

25 -
13
12

410
13
27
13
14
13
1

=

$\langle 5 \rangle = \{1, 5, 12, 8\}$