بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود / الرياض — الاختبار النهائي — في المقرر ٣٤٣ ريض
كلية العلوم / قسم الرياضيات — الفصل الدراسي الثاني ١٤٣٨/١٤٣٩ هـ — الزمن : ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س١ : (أ) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :-

(١) توجد ممن زمر مختلفة، طبقا للتماثل، كل منها رتبتها ٤.

(٢) إذا كان $y=(3,4,6)\in \mathbb{Z}_5^* \times U_{11} \times \mathbb{Z}_{18}$ فإن : $|y|>60$.

(٣) إن $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_{42}$ (٤) $A_4 \cong Q$.

(٥) $|Aut(\mathbb{Z})| \geq 3$ (٦) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{13}^*$.

(ب) اكتب جميع عناصر $Aut(\mathbb{Z}_8)$، كيف تظهر كعناصر في S_8 ؟

س٢ : (أ) إذا كانت $H \leq G$ و $x \in G$ فأجب عما يأتي :-

(١) اسبق الفراغ : $x^{-1}Hx = \{ \cdots \}$

(٢) أثبت أن $x^{-1}Hx \leq G$.

(ب) إذا عرفنا U_n كما يلي :

$U_n = \{ a \in \mathbb{Z}_n^* : (a,n)=1 \}$

فأثبت أن النظام $(U_n, \cdot)$ مغلق ولكل عنصر فيه يوجد نظير.

(ج) ناقش صحة العبارة : $U_9 \cong \mathbb{Z}_6$.

س٣ : (أ) إذا كانت G زمرة منتهية وكان C_a عدد مرافقات a في G فأثبت أن :

$C_a = [G : N(a)]$. (برهنة العدد الأخير).

(ب) إذا كان التفريق الدوري لتبديلة σ هو $\{3,2,2,2,1,1,1\}$ فأملأ الفراغات الآتية :-

(i) $\sigma \in \cdots$ (ii) $|\sigma| = \cdots$

(iii) $Aut(\langle \sigma \rangle) \cong \cdots$ (iv) $|N(\sigma)| = \cdots$

(v) $C_\sigma = \cdots$

س٤ : (أ) اكتب نص و برهنة "سيلو الأول".

(ب) لتكن G زمرة رتبتها 72. أثبت بالتفصيل أن G غير بسيطة (مستخدما في ذلك جميع المبرهنات التي تلزمك لانجاز هذا البرهان).

أسأل الله لكم التوفيق