بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود / الرياض — الاختبار النهائي — في المقرر ٣٤٢ ريض
كلية العلوم / قسم الرياضيات — الفصل الدراسي الثاني — ١٤٣٨/١٤٣٩ هـ — الزمن: ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س١: (أ) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي:-

(١) توجد خمس زمر مختلفة، طبقاً للتماثل، كل منها رتبتها 8.

(٢) إذا كان: $y=(3,4,6)\in \mathbb{Z}_5^* \times U_{11}\times \mathbb{Z}_{18}$ فإن: $|y|>60$.

(٣) إن $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_7\cong\mathbb{Z}_{42}$ (٤) $A_4\cong Q$.

(٥) $|Aut(\mathbb{Z})|\geq 3$ (٦) $\mathbb{Z}/_{12}\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_{13}^*$.

(ب) اكتب جميع عناصر $Aut(\mathbb{Z}_8)$، كيف تظهر كعناصر في S_8.

س٢: (أ) إذا كانت $H\leq G$ و $x\in G$ فأجب عما يأتي:-

(١) املأ الفراغ: $x^{-1}Hx=\{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\}$

(٢) أثبت أن $x^{-1}Hx\leq G$.

(ب) إذا عرفنا U_n كما يلي:

$U_n=\{d\in\mathbb{Z}_n^* : (d,n)=1\}$

فأثبت أن النظام $(U_n,\cdot)$ مغلق ولكل عنصر فيه يوجد نظير.

(ج) ناقش صحة العبارة: $U_9\cong\mathbb{Z}_6$.

س٣: (أ) إذا كانت G زمرة منتهية وكان C_a عدد مرافقات a في G فأثبت أن:

(مبرهنة العد الأخرى): $C_a=[G:N(a)]$.

(ب) إذا كان التفريق الدوري لتبديلة σ هو $\{3,2,2,2,1,1,1\}$ فاملأ الفراغات الآتية:-

$\boxed{i}$ $\sigma\in\cdots$ $\boxed{ii}$ $|\sigma|=\cdots$

$\boxed{iii}$ $Aut(\langle\sigma\rangle)\cong\cdots$ $\boxed{iv}$ $|N(\sigma)|=\cdots$

$\boxed{v}$ $C_\sigma=\cdots$

س٤: (أ) اكتب نص "مبرهنة سيلو الأولى".

(ب) لتكن G زمرة رتبتها 72. أثبت بالتفصيل أن G غير بسيطة (مستخدماً في ذلك جميع المبرهنات التي تلزمك لانجاز هذا البرهان).

أسأل الله لكم التوفيق