تمارين مقرر ٣٨٢ ريض (التحليل الحقيقي ١)

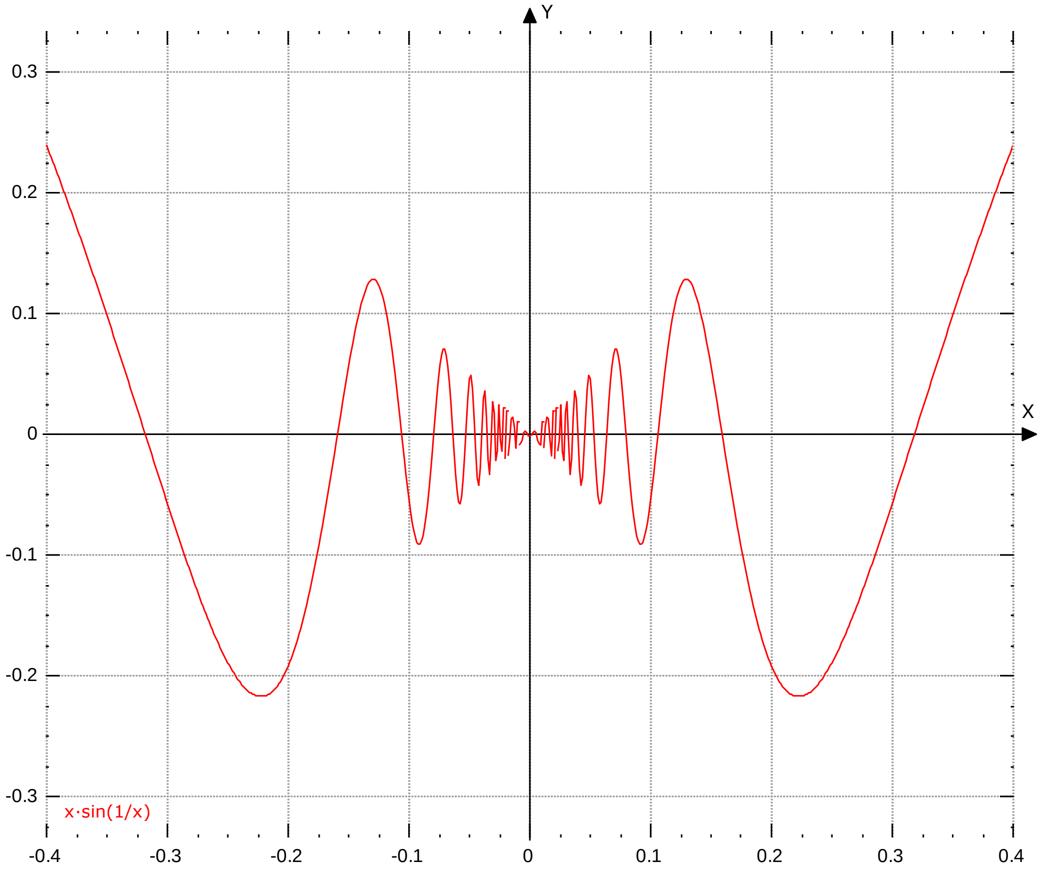
حل تمارين كتاب:

مبادئ التحليل الحقيقي الجزء الأول- تأليف: د.محمد القويز و د. صالح السنوسي- ط٢

إعداد:

أ. فواز بن سعود العتيبي

- قسم الرياضيات – جامعة الملك سعود



بسم الله الرحمن الرحيم

التمارين المحلولة في حصة التمارين

مقرر 382 ريض- مدرس التمارين: فواز بن سعود العتيبي

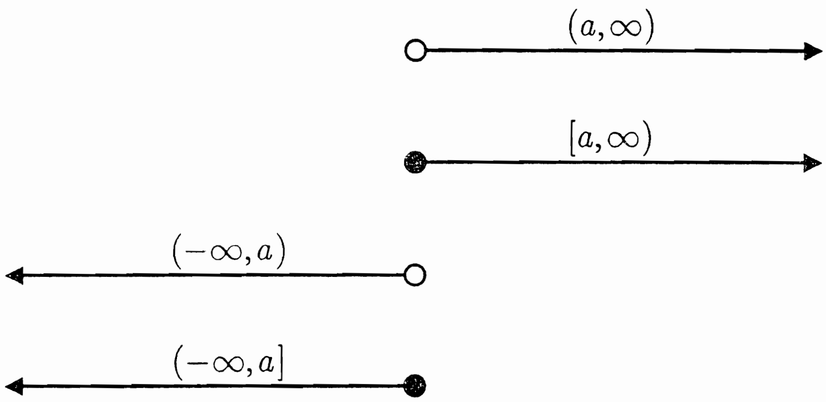
من كتاب: مبادىء التحليل الحقيقي الجزء الأول – تأليف محمد القويز و صالح السنوسي- ط2

الفصل	البند	الصفحة	أرقام التمارين المحلولة
الثاني (الأعداد الحقيقية)	2.2 (مسلمات الترتيب)	47	2, 8(بدون التعميم), 9
	2.3 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$	60	4 (i), 5, 12
	2.4 (مسلمة التمام)	80	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
	2.5 (المجموعات القابلة للعد)	92	2, 3, 4, 5, 6
الثالث (المتتاليات)	3.1 (المتتاليات و التقارب)	102	4(i), 6, 7
	3.2 (الخواص الأساسية للمتتاليات المتقاربة)	114	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11
	3.3 (المتتاليات المطردة)	124	1(i), 2, 3, 4
	3.4 (معيار كوشي و نظرية بولزانو-فايرشتراس)	138	1(i,ii,iii), 4, 5, 6, 7
	3.5 (المتتاليات الجزئية)	143	1(i), 2, 3
	3.6 (المجموعات المفتوحة و المجموعات المغلقة)	153	4, 7(ii), 8(ii), 11, 12
الرابع (نهاية الدالة)	4.1 (نهاية الدالة)	170	3(i), 4(iii), 5, 6, 7
	4.2 (النظريات الأساسية)	179	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9
	4.3 (بعض الامتدادات لتعريف نهاية الدالة)	187	2, 4, 5, 7, 8
	4.4 (الدوال المطردة)	194	1, 2, 3, 4
الخامس (الاتصال)	5.1 (الدوال المتصلة)	207	2(i,ii), 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13
	5.2 (تركيب الدوال المتصلة)	215	2, 3, 4
	5.3 (خواص الاتصال على فترة)	232	1→ 13
	5.4 (الاتصال المنتظم)	243	1(i) → 11

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10	260	5.5 (المجموعات المتراصة و الاتصال)	
1(iii), 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12	282	6.1 (المشتقة و قوانين الاشتقاق)	السادس (التفاضل)
1→ 8, 10, 11, 14, 15, 16, 17	301	6.2 (نظرية القيمة المتوسطة)	
1→ 6	317	6.3 (قاعدة لوبيتال)	
1(i), 2, 3, 6	329	6.4 (نظرية تيلور)	

كما سنستخدم الفترات **غير المحدودة** التالية

$$
\begin{aligned}
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
(-\infty,a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\
(-\infty,a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\
(-\infty,\infty) &= \mathbb{R}
\end{aligned}
$$



شكل 2.3

تمارين 2.2

1. أثبت التقارير التالية

$$a \leq b,\ b \leq a \quad \Rightarrow \quad a = b \qquad \text{(i)}$$

$$a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = a \cdot a > 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$1 > 0 \qquad \text{(iii)}$$

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} > 0 \qquad \text{(iv)}$$

$$a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \qquad \text{(v)}$$

(vi) إذا كان $ab>0$ فإما أن $a>0$ و $b>0$، أو أن $a<0$ و $b<0$.

(vii) $a\le b, c<d \;\Rightarrow\; a+c<b+d$

(viii) $0<a<b, 0<c<d \;\Rightarrow\; ac<bd$

(ix) $a<b, c<d \;\Rightarrow\; ad+bc<ac+bd$

(x) $0<a<1 \;\Rightarrow\; a^2<a$

$a>1 \;\Rightarrow\; a^2>a$

2. إذا كان $a<b+\varepsilon$ لكل $\varepsilon>0$، فأثبت أن $a\le b$.

إذا كان $|x|<\varepsilon$ لكل $\varepsilon>0$، فاستنتج أن $x=0$.

3. أثبت الأجزاء (i)، (ii)، (iii)، (iv)، (vi) من النظرية 2.1.

4. إذا كان $a,b\in\mathbb{R}$ و $b\ne 0$ فأثبت أن

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$$

5. متى تتحقق المساواة في متباينة المثلث (الفقرة (v) من نظرية 2.1).

6. عين مجموعة الأعداد x التي تحقق المتباينة المعطاة ثم مثلها على خط الأعداد:

(i) $-1<3x-7\le 4$

(ii) $|8x-1|<2$

(iii) $5\le|4-6x|$

(iv) $\dfrac{1}{x}<1$

(v) $x^2-7x+10>0$

(vi) $|x+4|<|2x-1|$

(vii) $|x|+|x+1|<3$

(viii) $\dfrac{1}{x-4}<\dfrac{5}{x+1}$

7. إذا كان

$$|x-x_0|<\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\right\},\quad |y-y_0|<\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}$$

فأثبت أن

$$|xy-x_0y_0|<\varepsilon$$

8. أثبت أن

$$|x_1y_1|+|x_2y_2|\le\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}$$

وعمم لتحصل على **متباينة شوارتز** (Schwarz Inequality)

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\le\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(إرشاد: استخدم $2ab\le a^2+b^2$)

9. إذا كان $x,y\in\mathbb{R}$ فأثبت أن

$$\max\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y+|y-x|)$$
$$\min\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y-|y-x|)$$

2.3 الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية

من الآثار المترتبة على اختيارنا لتقديم الأعداد الحقيقية عن طريق المسلمات، بدلاً عن بنائها بدءاً بالأعداد الطبيعية ومروراً بالصحيحة والنسبية، ضرورة السعي

لا يكتب في
هذا الهامش

تمارين (2-2) ص 47 :

8) استخدم الإرشاد : $2|a||b| \le a^2+b^2$

ضع $a=\frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$ و $b=\frac{|y_1|}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}$

$$\Rightarrow 2\,\frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\cdot\frac{|y_1|}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \le \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{y_1^2}{y_1^2+y_2^2} \qquad (1)$$

أيضاً ضع $a=\frac{|x_2|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$ و $b=\frac{|y_2|}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}$

$$\Rightarrow 2\,\frac{|x_2|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\cdot\frac{|y_2|}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \le \frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{y_2^2}{y_1^2+y_2^2} \qquad (2)$$

بجمع (1) و (2) (وأنظر ت 1 (vii))

$$\frac{2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\left(|x_1||y_1|+|x_2||y_2|\right) \le \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{y_1^2+y_2^2}{y_1^2+y_2^2}=2$$

$$\Rightarrow |x_1||y_1|+|x_2||y_2| \le \sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}$$

التعميم باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي :

~~نفرض أن~~ نفرض صحة العبارة من أجل $n-1$ أي أن العبارة التالية

$$\sum_{i=1}^{n-1}|x_i y_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2}$$

عبارة صحيحة

ونريد إثبات العبارة من أجل n

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| = \sum_{i=1}^{n-1}|x_i y_i| + |x_n y_n|$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2} + |x_n y_n|$$

لا يكتب في هذا الهامش

(9) نثبت أ (i) $a\le b,\ b\le a\Rightarrow a=b$

نفرض أن $x\ge y$:

$$\max\{x,y\}=x=\frac{1}{2}(x+y+(x-y))=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$

$$\min\{x,y\}=y=\frac{1}{2}(x+y-x+y)=\frac{1}{2}(x+y-(x-y))$$
$$=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$$

(3) (ii): $|x|<|y|\Rightarrow x^2<y^2$

أولاً: نفرض $x>0$ ، $y>0$ $\Leftarrow$ $|x|=x$ ، $|y|=y$

$0<x<y$ & $0<x<y$

$\Rightarrow x\cdot x<y\cdot y$ (أنظر viii)

$x^2<y^2$

ثانياً: $x<0$ ، $y<0$ $\Leftarrow$ $-x>0$ ، $-y>0$

$|-x|=|x|<|y|=|-y|\Rightarrow(-x)^2<(-y)^2$

$x^2<y^2$

ثالثاً: $x>0$ ، $y<0$ $\Leftarrow$ $|x|=x$ ، $|y|=-y$

$|x|<|y|\Rightarrow 0<x<-y$ ، $0<x<-y$

$\Rightarrow x^2<(-y)^2\Rightarrow x^2<y^2$

رابعاً: مثل ثالثاً

وعليه

$$b^2 = 2m^2.$$

إذن b^2 عدد زوجي، فيترتب على ذلك أن b أيضاً زوجي، وهذا يناقض افتراضنا ألا عامل مشترك بين a و b. $\square$

هـــذه النظرية تدل على قصور المجموعة $\mathbb{Q}$ عن التعبير عن الفكر الرياضي المـــتاح لنا حتى قبل عدة قرون، ولما كانت $\mathbb{Q}$ تحقق المسلمات م1–م11 فلا سبيل للخـــروج مـــن المأزق الذي نبهت إليه النظرية 2.4 سوى إضافة مسلمات جديدة لـــتفادي هذا القصور. سنرى في الواقع أن مسلمة إضافية واحدة تكفي لتجعل $\mathbb{R}$ مجمـــوعة قادرة على تلبية احتياجات جزء كبير من الفكر الرياضي، وبخاصة تلك المتعلقة بحساب التفاضل والتكامل.

تمارين 2.3

1. أثبت ما يلي
   (i) مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة P استقرائية.
   (ii) المجموعة $\{x \in P : x \neq 5\}$ غير استقرائية.
   (iii) إذا كانت المجموعة A_λ استقرائية لكل $\lambda \in \Lambda$ فإن $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ استقرائية.
2. أثبت الجزء الثاني من مثال 2.5.
3. أثبت تكافؤ مبدأ الاستقراء الرياضي مع الصياغتين المقدمتين في البند 2.3.
4. أثبت ما يلي بالاستقراء على n:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{r=1}^{n} \frac{4}{r(r+1)(r+2)} = 1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}$

(iii) إذا كان $u_{r+1} = 2u_r + 1$ فإن $u_n = 2^{n-1}(u_1 + 1) - 1$

احسب أيضاً $\sum_{r=1}^{n} u_r$ إذا كان $u_1 = 1$.

(iv) $3^{2n} + 7$ تقبل القسمة على 8 لكل $n \in \mathbb{N}$.

(v) $(3n+1)7^n - 1$ تقبل القسمة على 9 لكل $n \in \mathbb{N}$.

5. إذا كان $x > -1$ فأثبت أن

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

6. إذا كان $a > 0$ فأثبت أن

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{nm}$$

7. افرض أن التقارير $\mathrm{P}(n)$ تحقق

(i) $\mathrm{P}(m)$ صحيح

(ii) إذا كان $\mathrm{P}(n)$ صحيحاً، حيث n أي عدد طبيعي يحقق $n \geq m$، فإن $\mathrm{P}(n+1)$ صحيح.

أثبت أن $\mathrm{P}(n)$ صحيح لكل $n \geq m$.

استخدم هذه الحقيقة لتثبت أن

$$2^n \leq n! \quad \forall n \geq 4$$

8. تحقق أن $\mathbb{N}$ تحقق المسلمات م1، م2، م5، م6، م7، م9.

9. تحقق أن $\mathbb{Z}$ تحقق جميع المسلمات م1–م11 ماعدا م8.
10. تحقق أن $\mathbb{Q}$ تحقق جميع المسلمات م1–م11.
11. أثبت أن كلاً من $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$، $\sqrt{6}$، $\sqrt[3]{2}$، $\sqrt[3]{3}$ عدد غير نسبي.
12. أثبت أن $\sqrt{p}$ عدد غير نسبي لكل عدد أولي p .
13. أثبت أن

$$0 \le a \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le a^n \le a \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وأن

$$a \ge 1 \quad \Rightarrow \quad a^n \ge a \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وأنـــه يمكن وضع العلاقة $>$ مكان $\le$ في الاقتضاء الأول والعلاقة $<$ مكان $\ge$ في الاقتضاء الثاني.

2.4 مسلمة التمـــام

قبل تقديمنا للمسلمة الأخيرة نحتاج إلى بعض التعاريف التمهيدية.

تعريف 2.6

(i) نقول إن $b \in \mathbb{R}$ **حد علوي** (upper bound) للمجموعة $A \subset \mathbb{R}$ إذا كان

$$\forall a \in A, \quad a \le b$$

ونقول عن المجموعة A إنها **محدودة من أعلى** (bounded above) إذا كان لها حد علوي.

(ii) إذا كان $c \in \mathbb{R}$ يحقق

$$\forall a \in A, \quad a \ge c$$

لا يكتب في
هذا الهامش

تمارين 2.3 ص 60

4 (i) نفرض أن $P(n)$ هو التقرير $\sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(i) بوضع $n=1$ نحصل على الطرف الأيسر $r(r+1) = 1(1+1) = 1(2) = 2$

الطرف الأيمن $= \frac{1}{3}(1)(2)(3) = 2$

$\Leftarrow$ $P(1)$ صحيح

(ii) إذا كان $P(n)$ صحيحاً فإن:

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \sum_{r=1}^{n-1} r(r+1) + n(n+1)$$

$$= \frac{1}{3}(n-1)(n)(n+1) + n(n+1)$$

$$= n(n+1)\left[\frac{1}{3}(n-1) + 1\right]$$

$$= n(n+1)\left[\frac{1}{3}n - \frac{1}{3} + 1\right]$$

$$= n(n+1)\left[\frac{1}{3}n + \frac{2}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$\therefore$ $P(n+1)$ صحيح

إذن بالاستقراء الرياضي، التقرير صحيح من أجل $n \geq 1$:

12) نفرض أن $\sqrt{p}$ عدد نسبي ونكتب $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ (a,b أوليان فيما بينهما) حيث $a, b \in \mathbb{N}$ $\Leftarrow$ $a^2 = p b^2$ $\Leftarrow$ $b^2 | a^2$ (حالات شرط 1)

$\Leftarrow$ $b | a$ (مبرهنة في الأعداد) $\Leftarrow$ $a = kb$

$\Leftarrow$ أي أن قاسماً مشتركاً بين a و b وهو b

وهذا يناقض الفرض أن a و b ليس بينهما قاسم مشترك إلا الواحد $(a,b)=1$

حـــيث يمكن أن يرتبط ظهور أحد العددين 0 أو 1 بانفتاح أو إنغلاق دائرة كهربائية.

تمارين 2.4

1. احسب $\sup A$ و $\inf A$ إن وجدا فيما يلي:

(i) $A=\left\{x\in\mathbb{R}:x^2-9>0\right\}$

(ii) $A=\left\{1-\dfrac{(-1)^n}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$

(iii) $A=\mathbb{Q}$.

(iv) $A=\mathbb{N}\cup\{0\}$

2. إذا كـــان b حـــداً علوياً للمجموعة A فأثبت أن $b=\sup A$ إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $a\in A$ بحيث $a>b-\varepsilon$.

اكتب وأثبت نتيجة مماثلة لـــ $\inf A$.

3. إذا كانت A و B مجموعتين محدودتين من أعلى و $A\subset B$ فأثبت أن

$$\sup A\leq\sup B$$

ماذا نستطيع أن نقول عن $\inf A$ و $\inf B$؟

4. إذا كانـــت A و B محدودتين من أعلى فأثبت أن $A\cup B$ محدودة من أعلى وأن

$$\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}$$

ماذا نستطيع أن نقول عن $\inf(A\cup B)$؟

5. إذا كانت A,B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$ ، فإننا نعرف

$$A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$$

أثبت أن

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$$

متى كانت A و B محدودتين من أعلى.

اذكر وأثبت نتيجة مماثلة لـــ $\inf(A+B)$.

6. لتكن $A\subset\mathbb{R}$، $k\in\mathbb{R}$ ولنعرف

$$kA=\{ka : a\in A\}$$

إذا كانت A محدودة من أعلى و $k>0$ فأثبت أن

$$\sup(kA)=k\cdot\sup A$$

ماذا يحدث لو كانت $k\leq 0$؟

7. إذا كانت $x\in\mathbb{Q}$، $y\notin\mathbb{Q}$، فأثبت أن $x+y\notin\mathbb{Q}$. متى يكون $xy\in\mathbb{Q}$؟

8. إذا كانت $x>0$ فأثبت أن لكل $y\in\mathbb{R}$ توجد $n\in\mathbb{N}$ بحيث

$$nx>y$$

9. افرض أن X و Y مجموعتان غير خاليتين وتحققان

(i) $X\cup Y=\mathbb{R}$

(ii) $x\in X, y\in Y \;\Rightarrow\; x<y$

أثبت وجود $c\in\mathbb{R}$ بحيث

$$z<c \;\Rightarrow\; z\in X$$

و

$$z>c \;\Rightarrow\; z\in Y$$

10. أوجد المفكوك العشري والثنائي والثلاثي لكل من الأعداد

(i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{11}{15}$ (iii) $\frac{5}{8}$

11. أوجد الأعداد النسبية ذات المفكوكات التالية

(i) المفكوك العشري $0.37212121\cdots$

(ii) المفكوك الثلاثي 0.020121212

12. استخدم المفكوك العشري لتثبت كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$.

13. إذا كان $x_0 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ و $x_i \in \{0,1,2,\cdots,9\}$، $i \geq 1$، فأثبت أن

$$\left\{\sum_{i=0}^{n}\frac{x_i}{10^i} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

مجموعة محدودة من أعلى، وإذا كان x هو حدها الأعلى الأصغر فإن مفكوك x هو

$$x = x_0.x_1x_2\cdots$$

2.5 المجموعات القابلة للعد

لو تأملنا المجموعات

$$A = \{1,2,3,4\}$$
$$B = \{a,b,c\}$$
$$C = \{-1,0,1\}$$

فإننا سندرك على الفور أن عدد عناصر B مساو لعدد عناصر C وأنه أقل من عدد عناصر A. ليس الأمر بمثل هذا الوضوح إن ابتغينا مقارنة المجموعات غير المنتهية، مثل $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، P. وتبدو حاجتنا جلية إلى فهم رياضي يسمح بمقارنة عدد عناصر مجموعتين غير منتهيتين. لعل من أهم إنجازات **نظرية المجموعات** على يد العالم الرياضي **جورج كانتور** (Georg Cantor) في أواخر القرن التاسع عشر هي

لا يكتب في هذا الهامش

حل تمرين 2-4

(أ) (i)

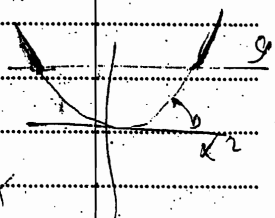
$A=\{x\in\mathbb{R}: x^2-9>0\}$

$=\{x\in\mathbb{R}: x^2>9\}$

$=\{x\in\mathbb{R}: \sqrt{x^2}>3\}=\{x\in\mathbb{R}: |x|>3\}$

$=\{x\in\mathbb{R}: x>3 \text{ or } x<-3\}$

$=(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$



$\inf A=-\infty, \quad \sup A=\infty$

(ii)

$A=\{1-\frac{(-1)^n}{n}, n \text{ even}\}$

$=\{1+\frac{1}{n}$ ، n زوجي$\}$

$\cup\{1-\frac{1}{n}$ ، n فردي$\}$

$n\geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n}<1 \Rightarrow \left(1<1+\frac{1}{n}\right) \quad 1+\frac{1}{n}\leq 2 \quad \forall n\geq 1$

⇐ 2 حد علوي لـ A ، نفرض u

نفرض u حد علوي لـ A أي $1+\frac{1}{n}\leq u$

$\Rightarrow u\leq 1+\frac{1}{2}$ (باختيار $n=2$ ، $2\leq u$)

⇐ $\inf A$ هو 2

$1>0$ ، $-\frac{1}{n}<0 \Leftarrow \frac{1}{n}>0$

$1-\frac{1}{n}<1$

⇐ 1 حد علوي لـ A

نفرض u حد علوي لـ A ، أي $1-\frac{1}{n}<u$

$1<\frac{1}{n}+u \qquad u\leq 1$

$\Rightarrow 1\leq u$ (بأخذ النهاية عندما $n\to\infty$ ، $\frac{1}{n}\to 0$)

⇐ $\sup A$ هو 1

لا يكتب في
هذا الهامش

5 نستخدم مبرهنة 2 صفحة رقم (2-4)

حسب المبرهنة أولاً نثبت أن $\sup A + \sup B$ حد علوي للمجموعة $A+B$

$\sup B \geq b \ \forall b \in B$ ، $\sup A \geq a \ \forall a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sup A + \sup B \geq a + b \in (A+B) \ \forall a \in A, \forall b \in B$

$\Rightarrow \sup A + \sup B$ حد علوي للمجموعة $A+B$

حسب المبرهنة 2 : لكي $\sup A + \sup B$ هو $\sup(A+B)$:

لكل $\epsilon > 0$: يوجد $a \in A$ بحيث $a > \sup A - \frac{\epsilon}{2}$

يوجد $b \in B$ بحيث $b > \sup B - \frac{\epsilon}{2}$

$a + b > \sup A + \sup B - \epsilon$

حسب مبرهنة (2) : $\sup A + \sup B = \sup(A+B)$

10 سنطبق يوجد $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ بحيث $n \leq \frac{1}{4} < n+1$

$\frac{1}{4} = x_0 . x_1 x_2 x_3 \ldots$

$n = 0$

$0 \leq \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow x_0 = n = 0$

$x_{n+1} = 10^{n+1}\left[x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i}\right]$

$n = 0 \Rightarrow x_1 = 10^1\left[\frac{1}{4} - 0\right] =$

$\left[\frac{i}{10}, \frac{i+1}{10}\right)$

نقسم الفترة $[0,1)$ إلى عشرة أقسام متساوية

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$0 \quad \frac{1}{10} \quad \frac{2}{10} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{4}{10} \quad \frac{5}{10} \quad \frac{6}{10} \quad \frac{7}{10} \quad \frac{8}{10} \quad \frac{9}{10} \quad 1$

$\frac{3}{10} \quad \frac{1}{4}$

$x_1 = 2 \Leftarrow \left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right)$ يقع في $\frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} \Leftarrow x_0 = \left[\frac{1}{4}\right] = 0$

نقسم الفترة $\left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right)$ إلى عشرة أقسام متساوية

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$\frac{2}{10} \quad \frac{2}{10}+\frac{1}{100} \quad \frac{2}{10}+\frac{2}{100} \quad \ldots \quad \frac{2}{10}+\frac{9}{100} \quad \frac{3}{10}$

$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} \leq \frac{1}{4} < \frac{2}{10} + \frac{6}{100} = \frac{26}{100} = \frac{13}{50}$

$x_2 = 5 \Leftarrow \left[\frac{2}{10}+\frac{5}{100}, \frac{2}{10}+\frac{6}{100}\right)$ يقع في $\frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} = 0.25000$

وهكذا

لا يكتب في
هذا الهامش

(1) 11

$$x = \sup\left\{ \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$x_0 = 0,\ x_1 = 3,\ x_2 = 7,\ x_3 = 2,\ x_4 = 1,\ x_5 = 2,\ x_6 = 1, \ldots$$

$$\underline{n=1} \Rightarrow \sum_{i=0}^{1} \frac{x_i}{10^i} = \frac{3}{10},\quad \underline{n=2} \Rightarrow \sum_{i=0}^{2} \frac{x_i}{10^i} = \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} =$$

$$n=3 \Rightarrow \sum_{i=0}^{3} \frac{x_i}{10^i} = \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{2}{10^3}$$

$$0.3721212121 = 0.37 + \frac{21}{10^4}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right):$$ حل آخر

$$= 0.37 + \frac{21}{10^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$= 0.37 + \frac{21}{10^4} \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}}$$

$$= 0.37 + \frac{\cancel{21}^{\,7}}{10^4} \cdot \frac{10^2}{\cancel{99}_{\,33}} = 0.37 + \frac{7}{3300} = \frac{1221 + 7}{3300}$$

$$= \frac{1228}{3300}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times\ 33 \\ \hline 111 \\ 111 \\ \hline 1221 \end{array}$$

~~$100x = 37.212121 \Leftarrow x = 0.372121$~~ حل آخر

$$3721.212121 \cdots = 10000x$$ [illegible]

$$9900x = 3684 \Rightarrow x = \frac{3684}{9900}$$ [illegible]

$$\begin{array}{r} 3721 \\ -\ 37 \\ \hline 3684 \end{array}$$

$$x = \frac{1228}{3300}$$

لا يكتب في
هذا الهامش

ANUE3 فئ

(12) نفرض $x<y$ (ونفترض أن $x>0$) المفكوك العشري لـ x هو $x_0.x_1x_2x_3\ldots$ والمفكوك العشري لـ y هو $y_0.y_1y_2y_3\ldots$

نفرض أن n هو أصغر عدد بحيث $x_n<y_n$

ونفرض أن $m\geq n$ أصغر عنصر بحيث $x_m\neq 9$

ضع $q=x_0.x_1x_2x_3\ldots x_{m-1}9000\ldots \Rightarrow q\in\mathbb{Q}$ (لأن ٩ لا تكرر)

$x<q$ لأن $x_m<9$

$q<y$ لأن $x_n<y_n$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$

(8) نفرض أن $y\geq 0 \Rightarrow \frac{y}{x}>0 \Rightarrow$ من خاصية أرخميدس

يوجد $n\in\mathbb{N}$ بحيث $\frac{y}{x}<n \Rightarrow y<nx$

تمارين 2.5

1. في هــذا التمــرين نريدك أن تثبت أن المجموعة غير المنتهية تتميز بتكافئها مع إحدى مجموعاتها الجزئية الفعلية.

(i) إذا كانــت A غــير منتهية وقابلة للعد، فأثبت وجود $B \subset A$ بحيث $B \neq A$، $B \sim A$.

(ii) إذا كانت A غير منتهية فأثبت وجود $B \subset A$ قابلة للعد.

(iii) إذا كانــت A غــير منتهية فاستنتج وجود $C \subset A$ بحيث $C \neq A$، $C \sim A$.

(iv) إذا كانت A منتهية و $B \subset A$ فأثبت أن $B \sim A \Rightarrow B = A$.

2. أثبت أن $(a,b) \sim (0,1)$.

3. أثبت أن $\mathbb{R} \sim (0,1)$.

إرشاد: هل تذكر من حساب التفاضل دالة تقابل مجالها $(-\pi/2, \pi/2)$ ومداها $\mathbb{R}$؟

4. أثبت أن مربع الوحدة $[0,1]\times[0,1]$ يكافئ $[0,1]$.

إرشاد: استخدم المفكوكات العشرية.

5. أثبت أن مجموعة أصفار كثيرات الحدود ذوات المعاملات النسبية قابلة للعد.

إرشــاد: أثــبت أن مجموعة كثيرات الحدود من الدرجة n ذوات المعاملات النسبية قابلة للعد.

6. إذا كانت هنالك دالة شاملة $f : \mathbb{N} \to A$ فأثبت أن A قابلة للعد.

لا يكتب في هذا الهامش

حلول تمارين 2.5

(3) مثلث ... $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$ التعريف

$f(x) = \tan x$ تقابل

$\Rightarrow (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$

وأيضاً $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \sim (0,1)$ من تمرين 2

ومن علاقة التعدي لـ $\sim$ $(0,1) \sim \mathbb{R}$

(4) $x, y \in [0,1] \Leftarrow x = 0.x_1x_2\ldots$ ، $y = 0.y_1y_2\ldots$

نعرف الدالة

$f(x,y) = 0.x_1y_1\,x_2y_2\ldots$

$f(x,1) = 0.x_1 9\, x_2 9\ldots$

$f(1,y) = 0.9y_1\,9y_2$

$f(1,1) = 1$

$f : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ تقابل

(5) $P = \{ \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1}{b_1}x + \cdots + \frac{a_n}{b_n}x^n ;\ a_i, b_i \in \mathbb{N} \}$

$f : P \to \mathbb{Q}^{n+1} = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\cdots\times\mathbb{Q}\ (\ ,\ n+1\ )$

$f(\frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1}{b_1}x + \cdots + \frac{a_n}{b_n}x^n) = (\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n})$

الدالة f تقابل

$\Rightarrow P \sim \mathbb{Q}^{n+1}$ (   )

و $\mathbb{Q}^{n+1}$ قابلة للعد (نظرية 2.10)

$\Leftarrow P$ قابلة للعد وكل من عناصرها كثيرات حدود

$\Leftarrow$ مجموعة أصفار عناصر P هي قابلة للعد.

(1) (i) A غير منتهية وقابلة للعد $\Leftarrow N \sim A$ (أصغر مجموعة قابلة للعد)

$\Leftarrow$ يوجد $f : N \to A$ تقابل

$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A) = N$

$\Leftarrow$ من مبرهنة (2.9) $f^{-1}(B)$ قابلة للعد

وبما أن f تقابل فإن $f^{-1}(B)$ يعطينا تقابلاً من $f^{-1}(B)$ إلى B

$\Leftarrow f^{-1}(B) \sim B \Leftarrow B$ قابلة للعد.

لا يكتب في
هذا الهامش

(ii) A غير منتهية $\Leftarrow A \neq \phi \Leftarrow$ يوجد $a \in A$ حيث $B = \{a\}$

B قابلة للعد .

(iii)

⑥ عندما A ~~قابلة للعد~~ غير منتهية $\Leftarrow A$ قابلة للعد

لنأخذ A غير منتهية

$\circ\circ$ $f(N) = A$ (الدالة f شاملة) $\Leftarrow$ لكل $y \in A$ يوجد $n \in N$ بحيث $f(n) = y$

$$\forall\, y \in A,\ \text{define } A(y) = f^{-1}(y) \subseteq N$$

$\Leftarrow$ يوجد لها عنصر أصغر $n_y = \min A(y)$

عرف $B = \{ n_y : y \in A \}$

لاحظ أن $B \subseteq N$ عناصر مختلفة جميعها

عرف $h : B \to A$

$$h(x) = f|_B(x) \quad \forall\, x \in B$$

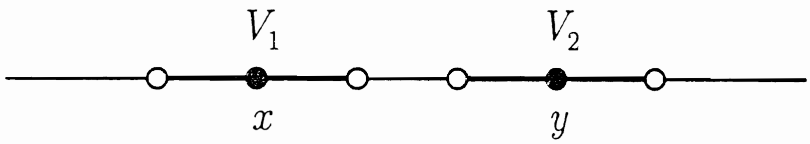
إذن h تقابل $\Leftarrow A \sim B$ بما أن $B \subseteq N \Leftarrow B$ قابلة للعد

و B غير منتهية $\Leftarrow B \sim N \Leftarrow A \sim N$

$\Leftarrow A$ قابلة للعد .

خاصة $\mathbb{R}$ التي تجعل النهاية وحيدة:

افرض أن $x \neq y$. عندئذ يوجد جوار V_1 للنقطة x وجوار V_2 للنقطة y بحيث $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.



شكل 3.3

لترى هذا خذ $V_1 = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ و $V_2 = (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ حيث، $\varepsilon = \dfrac{|x-y|}{2}$ مــثلاً. لمــا كان $x_n \to x$ فجميع حدود المتتالية من حد ما تقع في V_1، وكذلك جمــيع حدود المتتالية من حد ما تقع في V_2، إذ أن $x_n \to y$. لكن هذا يناقض أن $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. □

تمارين 3.1

1. اكتب الحد رقم n للمتتاليات الآتية على افتراض استمرار النمط المعطى

(i) $(5, 8, 11, 14, \cdots)$

(ii) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \cdots\right)$

(iii) $\left(1, -\dfrac{1}{4}, 9, -\dfrac{1}{16}, \cdots\right)$

2. اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية (x_n) إذا كان

(i) $x_1 = 2, x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$

(ii) $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$

(iii) $x_1 = 2, x_2 = -1, x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$

3. إذا كـــان مقياس القرب هو 0.005 فاختر N بحيث تكون كل قيم x_n لـــ $n \ge N$ قريبة من x في الحالات التالية

(i) $x_n = \dfrac{1}{n}$ ، $x = 0$

(ii) $x_n = \dfrac{1}{2n-1}$ ، $x = 0$

(iii) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ ، $x = 0$

(iv) $x_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$ ، $x = 3$

4. استخدم تعريف 3.2 لتثبت ما يلي

(i) $\lim \dfrac{n^3+1}{3n^3+n} = \dfrac{1}{3}$

(ii) $\lim \dfrac{1}{n^2+2} = 0$

(iii) $\lim \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{n}{n+1}\right) = 1$

(iv) $\forall k \in \mathbb{R}, \quad \lim \dfrac{k}{n} = 0$

5. أثبت أن المتتالية الثابتة متقاربة.

6. إذا كانت $x_n \to z$ ، $y_n \to z$ فأثبت أن المتتالية $(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots)$ متقاربة ونهايتها z.

7. أثبت أن الفترة المفتوحة (a,b) جوار لكل عنصر من عناصرها.

8. أثبت أن $\mathbb{R}\backslash\{c\}$ جوار لكل $x \ne c$.

لا يكتب في
هذا الهامش

تمارين (٣-١) :

٤ (أ) :

$$\left|\frac{n^3+1}{3n^3+n}-\frac{1}{3}\right| = \frac{|n-3|}{3(3n^3+n)}$$

$$\le \frac{n}{9n^3+3n} \quad \forall\, n \ge 3$$

$$\le \frac{1}{9n^2+3} \le \frac{1}{n} < \epsilon \quad \forall\, n \ge N$$

$$\Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon} = N$$

~~نضع $N = \max\{\frac{1}{\epsilon}, 3\}$~~ $\Leftarrow$ اختر N_0 بحيث $\frac{1}{N_0} < \epsilon$

ضع $N = \max\{N_0, 3\}$

$$n \ge N \Rightarrow \cancel{n > \frac{1}{\epsilon}} \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon$$

$$\left|\frac{n^3+1}{3n^3+n}-\frac{1}{3}\right| < \epsilon$$

(7) ليكن $x \in (a,b)$. خذ $\epsilon = \min\{x-a, b-x\}$ $\Leftarrow$ $\epsilon > 0$

وأيضاً نثبت أن $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset (a,b)$

$$y \in (x-\epsilon, x+\epsilon) \Rightarrow x-\epsilon < y < x+\epsilon$$

$$y < x+\epsilon < x+b-x = b$$

$\cancel{x-\epsilon < y}$ $\epsilon \le x-a \Rightarrow -\epsilon \ge a-x$

$$\Rightarrow x-\epsilon \ge a-x+x$$

$$\Rightarrow x-\epsilon \ge a$$

$$\Rightarrow a < y$$

$$\Rightarrow a < y < b \Rightarrow y \in (a,b).$$

تمارين 3.2

1. قرر ما إذا كانت (x_n) متقاربة أم لا. احسب النهاية متى وجدت.

(i) $$x_n = \frac{2n^3+3}{n^2+4}$$

(ii) $$x_n = \frac{(-1)^n n}{2n+1}$$

(iii) $$x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

(iv) $$x_n = \frac{\sin n}{n}$$

(v) $$x_n = \begin{cases} 1/n & n \in \mathbb{N}_1 \\ 0 & n \in \mathbb{N}_2 \end{cases}$$

حيث $\mathbb{N}_1$ ، $\mathbb{N}_2$ مجموعتا الأعداد الطبيعية الفردية والزوجية بالترتيب.

2. إذا كانت $(x_n + y_n)$ متقاربة و (x_n) متقاربة فأثبت أن (y_n) متقاربة. ما نهايتها؟ هل تستطيع تقديم نتيجة مشابهة تتعلق بالمتتالية $(x_n \cdot y_n)$؟.

3. هات مثالا لمتتاليتين (x_n) ،(y_n) بحيث تكون $(x_n + y_n)$ متقاربة دون أن تكون (x_n) و (y_n) متقاربتين.

4. هات مثالا لمتتالية (x_n) غير متقاربة بحيث تكون $(|x_n|)$ متقاربة. متى يكون التقرير $x_n \to x \Rightarrow |x_n| \to |x|$ صحيحاً؟

5. إذا كانت $\lim \frac{x_n - 1}{x_n + 1} = 0$ فأثبت أن (x_n) محدودة ثم استنتج أن $x_n \to 1$.

6. إذا كان $0 < b < 1$ فأثبت أن $nb^n \to 0$ (انظر البرهان المقدم في المثال 3.6).

7. إذا كان $0 < a < b$ فأثبت أن $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$.

8. لتكن $x_n > 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$. إذا كان $L < 1$ ، فأثبت أن $\lim x_n = 0$ باتباع الخطوات التالية:

(i) خذ $L < r < 1$. باستخدام $\varepsilon = r - L$ أثبت وجود $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < r \quad \forall n \geq N$$

(ii) أثبت أن

$$x_n < x_N \cdot r^{n-N} \quad \forall\, n > N$$

(iii) استنتج أن $x_n \to 0$.

إذا كان $L > 1$ فأثبت أن (x_n) غير محدودة وبالتالي غير متقاربة. هات مثالاً لمتتالية متقاربة (x_n) وأخرى غير متقاربة (y_n) بحيث يكون

$$\lim \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$$

9. استخدم نتيجة السؤال رقم 8 لتحسب $\lim x_n$ فيما يلي:

(i) $x_n = \frac{a^n}{3^n}$ حيث $a > 0$

(ii) $x_n = \frac{n!}{2^n}$

(iii) $x_n = \frac{a^n}{n^2}$ حيث $a > 0$

(iv) $x_n = \frac{a^n}{n^n}$.

10. نقول إن (x_n) **متقاربة على غرار سيزارو** إذا كانت $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$ متقاربة.

أثبت أن كل متتالية متقاربة، متقاربة على غرار سيزارو. هات مثالاً لمتتالية

ليست متقاربة ولكنها متقاربة على غرار سيزارو.

11. أثبت أن لكل $x \in \mathbb{R}$ توجد متتالية (x_n) في $\mathbb{Q}$ بحيث $x_n \to x$.

12. أثبت أن لكل $x \in \mathbb{R}$ توجد متتالية (x_n) في $\mathbb{Q}^c$ بحيث $x_n \to x$.

13. إذا كانت $a_n > 0$ و $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ فأثبت أن $\sqrt[n]{a_n} \to L$.

(تستطيع تعديل برهان التمرين رقم 8)

3.3 المتتاليات المطردة

لعل القارئ اليقظ الآن في انتظار آثار مسلمة التمام على مفهوم التقارب. في الواقع سنرى بصمات هذه المسلمة في أغلب ما تبقى من هذا الفصل. ونبدأ بالحالة الخاصة التي تكون فيها المتتالية مطردة حسب التعريف التالي:

تعريف 3.4

نقول إن المتتالية (x_n) **متزايدة** (increasing) إذا كان

$$x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وإذا كانت $x_{n+1} > x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإننا نقول إن (x_n) **متزايدة فعلاً**.

وتسمى (x_n) **متناقصة** (decreasing) إذا كان

$$x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ومتناقصة فعلاً إذا كانت $x_{n+1} < x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

وإن كانت (x_n) متزايدة أو متناقصة فهي تسمى **مطردة** (monotone).

لاحظ أن (x_n) متزايدة إذا وفقط إذا كانت $(-x_n)$ متناقصة، وبالتالي فإننا

حل تمارين 3-2

(7)

$$0 < a^n < b^n$$

$$b^n < a^n + b^n < 2b^n$$

$$b < \sqrt[n]{a^n + b^n} < \sqrt[n]{2}\, b$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \quad \downarrow$$

$$b \qquad\qquad 1 \quad b$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$$

(11) نستفيد من كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$

إذا كان $x \in \mathbb{Q}$ خذ $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n = x$ واضح $x_n \to x$

إذا كان $x \in \mathbb{Q}^c$ ، $x > 0$ من كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$ يوجد $q_1 \in \mathbb{Q}$ $0 < q_1 < x$

ضع $x_1 = q_1$ وكذلك وباستخدام يوجد $q_2 \in \mathbb{Q}$ بحيث $q_1 < q_2 < x$ ضع $x_2 = q_2$

ونستمر هكذا نحصل على متتالية $(x_n) = q_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ لا تكرار [illegible]

وهي تزايدية ومحدودة من أعلى $\Leftarrow$ متقاربة

سنثبت أن نهايتها هي x

لاحظ أن $0 < x_n < x$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Leftarrow$ $\lim x_n = q < x$

وإذا كان $x_n < q$ $\forall n$ فيكون

(5) لكل $\varepsilon = \frac{1}{m} > 0$ ، m يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\left|\frac{x_n - 1}{x_n + 1}\right| < \frac{1}{m}$

$$\Leftarrow |x_n - 1| < |x_n + 1| \frac{1}{m} \le \big||x_n| - 1\big| \Leftarrow |x_n| - 1 < (|x_n| + 1)\frac{1}{m}$$

$$\Leftarrow |x_n| - \frac{1}{m}|x_n| < \frac{1}{m} + 1 \Leftarrow \left(1 - \frac{1}{m}\right)|x_n| < \frac{m+1}{m} \Leftarrow \left(\frac{m-1}{m}\right)|x_n| < \frac{m+1}{m}$$

$$\Rightarrow |x_n| < \frac{m+1}{m-1} = \frac{m-1+2}{m-1} = 1 + \frac{2}{m-1} < 1 + 2 = 3 \quad \forall n \ge N$$

$$|x_n| \le \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|, 3\}$$

$\Leftarrow$ (x_n) محدودة

$$\frac{x_n - 1}{x_n + 1} \longrightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n + 1 - 2}{x_n + 1} = 1 - \frac{2}{x_n + 1} \longrightarrow 0$$

$$\frac{2}{x_n + 1} \longrightarrow 1 \Rightarrow \frac{x_n + 1}{2} \longrightarrow 1 \Rightarrow x_n + 1 \longrightarrow 2$$

$$\Rightarrow x_n \longrightarrow 2 - 1 = 1$$

(10) ضع $y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ وافرض أن (x_n) متقاربة من x.

لتكن $\epsilon > 0$. بما أن $x_n \to x \Leftarrow x_n - x \to 0$ فإن هنالك M بحيث $|x_n - x| \leq M$ لكل n.

أختر $N_0 \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{M}{N_0} < \frac{\epsilon}{2}$. كذلك أختر $N_1 \in \mathbb{N}$ بحيث:

$$n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$$

إذا كانت $n \geq N_0 N_1$ فإن:

$$|y_n - x| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |x_k - x| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n} |x_k - x|$$

$$\leq \frac{MN_1}{n} + \left(\frac{n - N_1}{n}\right)\cdot\frac{\epsilon}{2}$$

$$< \frac{M}{N_0} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

إذن $y_n \to x$.

المثال: خذ $x_n = (-1)^n$ تتقارب على نحو سيزارو من 0 ولكنها غير متقاربة.

تمارين 3.3

1. أثبت فيما يلي أن المتتالية (x_n) مطردة ومحدودة ثم احسب نهايتها

(i) $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = \frac{1}{7}(4x_n + 5)$

(ii) $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

(iii) $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = \frac{4x_n + 2}{x_n + 3}$

2. إذا كانت $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \cdots + \frac{1}{2n}$ فأثبت أن (x_n) متقاربة.

3. افرض أن $0 < x_1 < y_1$ وأن المتتاليتين (x_n) و (y_n) معرفتان بالتالي

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$$
$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

أثبت أن (x_n) و (y_n) متقاربتان ومن النهاية نفسها.

4. افرض أن $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4.6 \cdots 2n}$

(i) أثبت أن (x_n) متقاربة.

(ii) أثبت أن $((2n+1)x_n^2)$ متقاربة.

(iii) احسب $\lim x_n$.

5. إذا كانت A غير خالية ومحدودة من أعلى فأثبت أن فيها متتالية متزايدة (x_n) بحيث $\lim x_n = \sup A$.

6. لتكن (x_n) متتالية محدودة. عرف المتتاليتين (y_n) و (z_n) كما يلي:

$$y_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$$
$$z_n = \inf\{x_k : k \geq n\}.$$

أثبت أن كلاً من (y_n) و (z_n) متقاربة. أثبت أن (x_n) متقاربة إذا وفقط إذا كانت

$$\lim y_n = \lim z_n.$$

تسمى $\lim y_n$ **نهاية** (x_n) **العليا** ويرمز لها بـــ $\limsup x_n$ أو $\overline{\lim}\, x_n$، كما أن $\lim z_n$ تدعـــى **نهايـــة** (x_n) **الســـفلى** ويرمز إليها بـــ $\liminf x_n$ أو $\underline{\lim}\, x_n$. إذا كانـــت (x_n) غير محدودة من أعلى فقد جرت العادة على وضع $\limsup x_n = \infty$، وإن كانـــت غـــير محـــدودة مـــن أســـفل على وضع $\liminf x_n = -\infty$.

3.4 معيار كوشي ونظرية بولزانو – فايرشتراس

إذا تأملنا أمثلتنا السابقة فسنرى أن تقارب المتتالية غير المطردة، والتي لا تقبل التفتـــيت بواسطة العمليات الجبرية، لا يتقرر إلا بالرجوع إلى التعريف، وفي هذه الحالـــة لا بـــد لنا من تخمين النهاية قبل الشروع في إثبات التقارب. من الجلي أننا بحاجة إلى معيار يمكننا من تقرير التقارب دون الحاجة إلى معرفة النهاية. وفي سعينا لإيجـــاد هذا المعيار سنحتاج إلى استحداث بعض التعاريف والمفاهيم واستخلاص العديد من النتائج المهمة لذاتها ولتحقيق ذلك الهدف.

تعريف 3.5

تســـمى (x_n) متتالية من نوع كوشي، أو **متتالية كوشي** (Cauchy sequence)، إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ توجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$m, n \geq \mathbb{N} \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

لا يكتب في
هذا الهامش

حل تمرين 3.3

(1) ① $x_2 = \frac{1}{4}(9) \ge x_1$ ⇐ أي نثبت أن (x_n) متتالية متزايدة

نفرض صحة التقرير من أجل n أي $x_{n+1} \ge x_n$

$$x_{n+2} = \frac{1}{7}(4x_{n+1}+5) \ge \frac{1}{7}(4x_n+5) = x_{n+1}$$

⇐ التقرير صحيح من أجل $n+1$ ⇐ بالاستقراء الرياضي التقرير صحيح من أجل كل n ⇐

⇐ (x_n) متتالية متزايدة

سنثبت أن (x_n) محدودة من أعلى بالعدد:

$$x_n \le 2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

نستخدم الاستقراء الرياضي:

$n=1$ ⇐ $x_1 = 1 < 2$ ⇐ التقرير صحيح من أجل $n=1$

نفرض صحة التقرير من أجل n أي أن $x_n \le 2$

$$x_{n+1} = \frac{1}{7}(4x_n+5) \le \frac{1}{7}(4(2)+5) = \frac{1}{7}(13) < 2$$

⇐ التقرير صحيح من أجل $n+1$ ⇐ بالاستقراء الرياضي التقرير صحيح من أجل كل n

⇐ (x_n) محدودة من أعلى

⇐ من نظرية (3.2) (x_n) متقاربة

إيجاد النهاية: نهاية (x_n) هي x

المتتالية (x_{n+1}) ذيل للمتتالية (x_n) فنهايتها هي x أيضًا

نأخذ نهاية الطرفين: $x_{n+1} = \frac{1}{7}(4x_n+5)$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{7}(4x+5) \Rightarrow 7x = 4x+5$$

$$3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

النهاية لـ (x_n) هي $\frac{5}{3}$

②

$$0 < x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} \le \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n+1} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \le 2$$

⇐ (x_n) محدودة

$$x_n = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = x_{n+1}$$

⇐ (x_n) متناقصة

⇐ من نظرية (3.7) ⇐ (x_n) متقاربة

$\frac{1}{2}\, x_n + x_n \quad y_1 + y_2 = 2y_1$

لا يكتب في
هذا الهامش

(3) $0 < x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} < y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$ اثبت باستخدام الاستقراء الرياضي

$n = 1 \Rightarrow \quad x_2 = \sqrt{x_1 y_1} < \sqrt{y_1^2} = y_1 <$

(4)

(4) (i) $x_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$

$0 < \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\cdots\left(\frac{2n-1}{2n}\right) < (1)(1)\cdots(1) = 1 \quad \forall n \in N$

$\Leftarrow$ (x_n) محدودة

$x_2 < x_1 \Leftarrow x_2 = \frac{3}{8}, \; x_1 = \frac{1}{2}$ ~~نبرهن~~

$\Leftarrow$ نبرهن أن (x_n) ~~متناقصة~~ متتالية متناقصة

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\cancel{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}(2n+1)}{\cancel{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}(2n+2)} \cdot \frac{\cancel{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}}{\cancel{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}} = \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{2n+2}{2n+2} = 1$$

$\Rightarrow x_{n+1} < x_n \quad \forall n \in N$

$\Leftarrow$ (x_n) متناقصة

(x_n) متقاربة $\Leftarrow (3-7)$ نظرية

(iii) باستخدام نظرية الساندويتش (3-6 نظرية)

$$\left(\frac{1}{2n}\right)^n = \frac{1}{(2n)^n} < x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} < (1)(1)\cdots(1) = 1$$

$\Downarrow$

1

خــذ $N=1$، عــندئذ نستطيع إيجاد $n_1 \geq N$ بحيث $\left|x_{n_1}-x\right| \geq \varepsilon$. الآن خذ $N=n_1+1$، عندئذ توجد $n_2 \geq N$، أي $n_2>n_1$، بحيث $\left|x_{n_2}-x\right| \geq \varepsilon$، $\cdots$ الخ.

إذا سرنا على هذا المنوال فسنحصل بالاستقراء على متتالية جزئية $\left(x_{n_k}\right)$ تحقق
$$\left|x_{n_k}-x\right| \geq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$
الآن المتتالــية $\left(x_{n_k}\right)$ محــدودة وعليه فإن لها متتالية جزئية $\left(x_{n_{k_j}}\right)$ متقاربة (نظرية 3.13). وبمــا أن $\left(x_{n_{k_j}}\right)$ متتالــية جــزئية من $\left(x_n\right)$ فإن نهايتها هي x بمقتضى المعطيات. ولكن هذا يتناقض مع كون $\left|x_{n_{k_j}}-x\right| \geq \varepsilon$ لكل j. إذن لا مناص من أن $x_n \rightarrow x$. □

3.5 تمارين

1. مثل لما يلي:
   (i) متتالية ليس لها متتالية جزئية متقاربة.
   (ii) متتالية غير محدودة لها متتالية جزئية متقاربة.
2. إذا كانت كل متتالية جزئية من $\left(x_n\right)$ لها متتالية جزئية نهايتها 0 فأثبت أن
$$\lim x_n=0$$
3. افــرض أن $x_n \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$. إذا كانت $\left((-1)^n x_n\right)$ متقاربة فأثبت أن $\left(x_n\right)$ متقاربة. ما هي النهاية؟
4. افرض أن $\left(x_n\right)$ متتالية محدودة وعناصرها مختلفة ($x_n \neq x_m$ لكل $n \neq m$). إذا كانــت للمجمــوعة $\left\{x_n : x \in \mathbb{N}\right\}$ نقطــة تراكم واحدة x فأثبت أن

. $x_n \to x$

5. إذا كانت (x_n) متتالية محدودة فأثبت وجود متتالية جزئية نهايتها $\limsup x_n$ وأخرى نهايتها $\liminf x_n$. أثبت كذلك أن $\limsup x_n$ و $\liminf x_n$ هما أكـــبر وأصغر نهاية يمكن تحقيقها بمتتالية جزئية من (x_n) (راجع تمرين 3.3.6 لتعريف $\limsup$ و $\liminf$).

6. إن تـــرتيب النظريات كما قدمناه في البندين الأخيرين ليس المفضل بالضرورة لدى جميع الكتاب. في هذا التمرين سنساعد القارئ على إثبات نظرية 3.13 ثم نقوده إلى إثبات معيار كوشي ونظرية بولزانو-فايرشتراس (نظرية 3.11).

   (i) لتكن (x_n) متتالية محدودة. نسمي العدد $n \in \mathbb{N}$ **نقطة قمة** لو كان

$$x_n \geq x_k \quad \forall\, k \geq n.$$

   إذا كانـــت مجمـــوعة نقاط القمة منتهية، فوضِّح كيف تختار من (x_n) متتالية جزئية متزايدة. وإذا كانت مجموعة نقاط القمة غير منتهية فوضِّح كيف تختار متتالية جزئية متناقصة.

   اســـتنتج الآن وجود متتالية جزئية متقاربة. بهذا تكون قد أثبت نظرية 3.13.

   (ii) إذا كانـــت (x_n) متتالـــية من نوع كوشي ولها متتالية جزئية متقاربة، فأثبت أن (x_n) نفسها متقاربة (ولذات النهاية).

   (iii) استنتج معيار كوشي (ستحتاج للجزئين (i)، (ii) والتمهيد 3.2).

   (iv) استخدم النظريتين 3.10 و 3.13 لإثبات نظرية بولزانو-فايرشتراس.

لا يكتب في هذا الهامش

تمارين 3.3

(1) (i) $\{n\}$ (ii) $\{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$

المتتالية الجزئية $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$

(2) كل متتالية جزئية من (x_n) لها متتالية جزئية تؤول إلى 0

$\Leftarrow$ " " " (x_n)

(3) بالتناقض ($x_n \nrightarrow 0$) أي يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث $N \in \mathbb{N}$ يوجد $n \geq N$

بحيث $|x_n| \geq \varepsilon$

خذ $N = 1 \Leftarrow$ يوجد $n_1 \geq N = 1$ بحيث $|x_{n_1}| \geq \varepsilon$

خذ $N = n_1 + 1 \Leftarrow$ " $n_2 \geq n_1 + 1$ " $|x_{n_2}| \geq \varepsilon$

$n_2 > n_1$ وهكذا

$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots \Rightarrow |x_{n_k}| \geq \varepsilon$

(x_{n_k}) جزئية من (x_n) ولكن كل متتالية $(x_{n_{k_j}})$ جزئية من (x_{n_k})

بأن $|x_{n_{k_j}}| \geq \varepsilon$ وهذا تناقض

(4) ضع $z_n = (-1)^n x_n \to z$

$x_n = |z_n| \to |z| \Rightarrow (x_n)$ conv.

ضع $x_n \to x_0$

$z_{2n} = x_{2n} \longrightarrow x_0$

$z_{2n+1} = -x_{2n+1} \longrightarrow -x_0$

$\Leftarrow x_0 = -x_0 \Leftarrow x_0 = 0$

والاستعانة بالتمرين 3.1.6 لإكمال البرهان. في البند التالي سنسلك سبيلاً أكثر عمومية ونقدم من خلال ذلك مفهوماً جديداً.

تمارين 3.4

1. أوجد $\widehat{A}$ فيما يلي:

(i) $A=\mathbb{N}$

(ii) $A=[0,1)\cup(3,4)\cup(5,6]$

(iii) $A=\left\{3^n+\dfrac{1}{k}:n,k\in\mathbb{N}\right\}$

(iv) $A=\mathbb{Q}\backslash\{1/n:n\in\mathbb{N}\}$

2. إذا كانت $A\subset B$ فما العلاقة بين $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$؟

3. هات مثالاً

(i) لمجموعة $A\subset\mathbb{R}$ لها أربع نقاط تراكم فقط

(ii) لمجموعة $A\subset\mathbb{R}$ بحيث تكون $\widehat{A}$ قابلة للعد.

4. لكل $A,B\subset\mathbb{R}$ أثبت ما يلي:

(i) $\widehat{(A\cup B)}=\widehat{A}\cup\widehat{B}$

(ii) $\widehat{(A\cap B)}\subset\widehat{A}\cap\widehat{B}$.

وهات مثالاً لمجموعتين A,B بحيث $\widehat{(A\cap B)}\neq\widehat{A}\cap\widehat{B}$.

5. إذا كانت $A\subset\mathbb{R}$ غير خالية ومحدودة من أعلى و $\sup A\notin A$، فأثبت أن $\sup A\in\widehat{A}$.

6. هات مثالاً لمتتالية من الفترات المحدودة المفتوحة (I_n) بحيث $I_{n+1}\subset I_n$ و

$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \varnothing$.

7. إذا كان $x_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{r^2}$ فأثبت أن (x_n) من نوع كوشي (ولذا متقاربة).
8. إذا كانـــت (x_n) و (y_n) من نوع كوشي فأثبت أن كلاً من $(x_n + y_n)$ و $(x_n y_n)$ من نوع كوشي.
9. أثبت صحة المعادلتين (3.6) و (3.7) في المثال 3.16.

3.5 المتتاليات الجزئية

تعريف 3.7

لتكن (x_n) متتالية ما. إذا كانت (n_k) متتالية من الأعداد الطبيعية المتزايدة فعلاً، أي إذا كانت

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

فإنـــنا نســـمي المتتالـــية (x_{n_k})، أي $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots)$، **متتالـــية جـــزئية** (subsequence) من (x_n).

مـــن هـــذا التعريف نرى أن المتتالية الجزئية هي نتيجة الاستغناء عن بعض عناصـــر المتتالـــية الأم وإعادة ترقيم الحدود الباقية دون الإخلال بالترتيب السابق.
لنورد بعض الأمثلة:

(i) كـــل ذيـــل من (x_n) يشكل متتالية جزئية منها، فمثلاً الذيل رقم 3 هو المتتالية $(x_4, x_5, x_6, \cdots)$. وبكتابة $n_k = k + 3$ فإن $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$،

لا يكتب في
هذا الهامش

حل تمارين 3.4

(1) (i) $\hat{N} = \hat{A} = \phi$ (أنظر البرهان مثال البرهان من مثال 3.14)

(ii) $\hat{A} = [0, \hat{1}) \cup (3, \hat{4}) \cup (5, \hat{6}]$
$= [0,1] \cup [3,4] \cup [5,6]$ (أنظر 4 (i))

(iii) $\hat{A} = 3^n$ (iv) $\hat{A} = \mathbb{R}$ لأن $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ يوجد $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ بحيث $x_n \to x$

(4) $A = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R}$ ، $B = \mathbb{Q}^c$
$A \cap B = \phi$; $(\widehat{A \cap B}) = \hat{\phi} = \phi$
$\hat{A} \cap \hat{B} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ (ومن مثال 3.15)

(6) $I_n = (0, \frac{1}{n})$

$I_n = (0, \frac{1}{n}) \supset (0, \frac{1}{n+1}) = I_{n+1}$ (لأن $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$$

إثبات أن $\bigcap = \phi$ (نفرض العكس) يوجد $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

$\Rightarrow x \in I_n \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$

وهذا تناقض نتيجة (2.6.1)

$\Leftarrow$ $\bigcap^{\infty} I_n = \phi$

(7) $|x_n - x_m| = \sum_{r=m+1}^{n} \frac{1}{r^2} = \sum_{r=m+1}^{n} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{r}\right) \leq \frac{m+2}{(m+1)^2}$

$= \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n}$

(5) البرهان من تمرين 2 تمارين 2.4

(1) (iii) $A = \{3 + \frac{1}{k}\} \cup \{2^2 + \frac{1}{k}\} \cup \dots \cup \{2^n + \frac{1}{k}\} \cup \dots$
$= \bigcup_{n=1} \{3^n + \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \hat{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{3^n\} = \{3, 3^2, \dots\}$ (prove it)

(1) (iv) $\hat{A} = \mathbb{R}$ لأن

(7) استخدم $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{2^3}{3^4}+\cdots \\
&= \frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdots\right] \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2/3} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

أي أن "طـــول" المجموعة F يساوي الصفر! ومع ذلك فإن الفقرة 2 تقرر أن $F\sim[0,1]$، مما يناقض توقعاتنا الحدسية. وفي الواقع فإن مجموعة كانتور تظهر كـــثيراً في الأمثلة المناقضة لما هو متوقع، وتذكرنا مراراً بمغبة قبول الحدس على أنه الصواب دائماً.

تمارين 3.6

1. أثبت بالتفصيل التقارير الواردة في الأمثلة المذكورة بعد التعريف 3.9.
2. إذا كانت $A\subset\mathbb{R}$ مفتوحة ومحدودة فأثبت أن $\sup A\notin A$ و $\inf A\notin A$.
3. إذا كانت A مغلقة ومحدودة فأثبت أن $\inf A, \sup A\in A$.
4. هات مثالاً لمجموعات مغلقة اتحادها لا يكون مجموعة مغلقة.
5. أثـــبت أن $A\subset\mathbb{R}$ مغلقة $\Leftrightarrow$ كل متتالية في A من نوع كوشي لها نهاية في A.
6. لـــتكن $A\subset D$. سنقول إن A **مفتوحة في** D إذا كان لكل $x\in A$ توجد $\varepsilon>0$ بحيث

$$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap D\subset A$$

أثبت أن A مفتوحة في D $\Leftrightarrow$ يوجد مجموعة مفتوحة G بحيث

$$A = G \cap D.$$

كيف تعرف المفاهيم التالية؟

(i) A جوار لـــ x في D

(ii) A مغلقة في D

7. نعرف **داخل** (interior) المجموعة A بأنه أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A، ونرمز إليه بـــ A°. أثبت أن

(i) A مفتوحة $\Leftrightarrow$ $A = A^\circ$

(ii) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ,\ (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

هات مثالاً لمجموعتين A و B بحيث $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$

8. نعـــرف **انغلاق** (closure) المجموعة A بأنه أصغر مجموعة مغلقة تحتوي A، ونرمز إليه بـــ $\overline{A}$. أثبت أن

(i) A مغلقة $\Leftrightarrow$ $A = \overline{A}$

(ii) $x \in \overline{A}$ $\Leftrightarrow$ لكل $\varepsilon > 0$ نجد أن $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

(iii) $x \in \overline{A}$ $\Leftrightarrow$ توجد متتالية (x_n) في A بحيث $x_n \to x$

(iv) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

هات مثالاً لمجموعتين A و B بحيث $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$

(v) $\overline{A} = A \cup \widehat{A}$.

9. نعرف **حافة** A (أو **حدود** A) (boundary) بأنها المجموعة

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

أثبت أن $A^\circ \cap \partial A = \varnothing$ وأن $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$.

10. أثبت أن $\overline{A}=\left[\left(A^c\right)^\circ\right]^c$ ، $A^\circ=\left(\overline{A^c}\right)^c$.

11. هات مثالاً لمجموعة A بحيث $\overline{A^\circ}\neq\overline{A}$ ، ومجموعة B بحيث $\left(\overline{B}\right)^\circ\neq B^\circ$.

12. احسب داخل وانغلاق وحافة كل من المجموعات التالية:

(i) $\mathbb{N}$ (ii) $\mathbb{Z}$ (iii) $\mathbb{R}$ (iv) $\mathbb{Q}$ (v) $\mathbb{Q}^c$

(vi) $[a,b)$ (vii) $(2,3]\cup(4,5)$.

لا يكتب في
هذا الهامش

تمارين 3.6

(3.3) من 5 تمرين

س

~~A مغلقة ⇒ يوجد متتالية متزايدة (x_n) بحيث~~
~~$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup A$~~

ومن نظرية (3.18) وبما أن A مغلقة فنهايات ...
إذا كانت $\sup A \notin A$ ⇐ من تمرين 5 مجموعة (3.4) ج

$\Rightarrow \sup A \in \hat{A}$ فنستطيع إيجاد

ومن نظرية (3.10) يمكن اختيار متتالية (x_n) في A بحيث

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup A$$

ومن نظرية (3.18) وبما أن A مغلقة فإن نهايات متتاليات في A تنتمي إلى A

$$\Rightarrow \sup A \in A$$

(٤) $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$ لكل $n \in N$ ⇐ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,1]$ ليست مغلقة

مغلقة

(٧) (ii) $A = Q$ ، $B = Q^c$ ⇐ $A \cup B = R$ ⇐ $(A\cup B)^\circ = R^\circ = R$ (R مفتوحة) فرق أنظر

$\mathring{A} \cup \mathring{B} = \mathring{Q} \cup (\mathring{Q^c}) = \phi \cup \phi$ وسابقاً

$= \phi$

(٨) (ii) خذ $A = Q$ ، $B = Q^c$ ⇐ $A \cap B = \phi$ ⇐ $\overline{(A\cap B)} = \bar{\phi} = \phi$

بينما $\bar{A} \cap \bar{B} = R \cap R = R$

(٩) $B = A = Q$

$\bar{A} = R$ ، $\mathring{A} = \phi$ ⇐ $\bar{\mathring{A}} = \bar{\phi} = \phi$ ⇐ $\bar{\mathring{A}} \neq \bar{A}$

$\mathring{B} = \phi$ ، $\bar{B} = R$ ⇐ $(\bar{B})^\circ = R$ ⇐ $(\bar{B})^\circ \neq \mathring{B}$

(12)

(i) $\mathring{N} = \phi$ ، $\bar{N} = R$ و ، $\partial N = R$

(ii) $\mathring{Z} = R$

(iii) $\mathring{R} = R$ ، $\bar{R} = R$ ، $\partial R = \phi$

(iv) $\mathring{Q} = \phi$ ، $\bar{Q} = R$ ، $\partial Q = R$

(v)

(vi) $\mathring{[a,b)} = (a,b)$ ، $\overline{[a,b)} = [a,b]$ ، $\partial[a,b) = [a,b] \cap (-\infty,a]$

$(-\infty, a)$

$= \{a\}$

(vii)

لا يكتب في هذا الهامش

2) هل $\sup A$ و $\inf A$ نقاط نهاية لمتتالية في A

[1) ~~نظرية (3.10)~~ تمرين 5 مجموعة (3.4) ثم نظرية (3.10)]

~~بالمتتالية~~

أي $\sup A \in A \Leftarrow$ يوجد جوار ε بحيث

$(\sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon) \subseteq A$

$\Rightarrow$

نظرية 4.3

لتكن $f:D\to\mathbb{R}$ و $c\in\widehat{D}$. إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة، فهي وحيدة.

تمارين 4.1

1. بين أيّ التعاريف التالية لـــ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$ صحيح وأيها خاطئ:

(i) لكل $\delta>0$ توجد $\varepsilon>0$ بحيث
$$x\in D,\ 0<|x-c|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-\ell|<\delta$$

(ii) لكل $\varepsilon>0$ توجد $\delta>0$ بحيث
$$x\in D,\ 0<|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|\le\varepsilon$$

(iii) لكل $\delta>0$ توجد $\varepsilon>0$ بحيث
$$x\in D,\ 0<|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

(iv) لكل $\varepsilon>0$ توجد $\delta>0$ بحيث
$$x\in D,\ 0<|x-c|\le\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<7\varepsilon$$

(v) لكل $\varepsilon>0$ توجد $\delta>0$ بحيث
$$x\in D,\ |f(x)-\ell|<\varepsilon \Rightarrow 0<|x-c|<\delta$$

(vi) لكل $\varepsilon>0$ توجد $\delta>0$ بحيث
$$x\in D,\ 0<|x-c|<\delta/5 \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

2. باستخدام التعريف 4.1، أثبت فيما يلي أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$

(i) $f(x)=x^3$ ، $\ell=c^3$.

(ii) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ ، $c=1$ و $\ell=1$

(iii) $f(x)=\sqrt{x}$ $(x\ge 0)$ ، $c=2$ و $\ell=\sqrt{2}$

3. باستخدام التعريف 4.1 مباشرة أو النظرية 4.1 أثبت أن

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x}{1+x^2}=\frac{3}{2} \qquad \text{(i)}$$

$$\lim_{x\to 1}x^5+\frac{1}{x}=2 \qquad \text{(ii)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=12 \qquad \text{(iii)}$$

4. أثبت أن النهايات التالية غير موجودة

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{(i)}$$

$$\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right) \qquad \text{(ii)}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2+\operatorname{sgn}x\right) \qquad \text{(iii)}$$

5. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بما يلي

$$f(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbb{Q}\\ -x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

فأثبت أن $\lim_{x\to c}f(x)$ موجودة $\Leftrightarrow$ $c=0$.

6. لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $\lim_{x\to 0}f(x)=\ell$. إذا كانت $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بـ $g(x)=f(ax)$ حيث $a>0$، فأثبت أن

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\ell.$$

7. لتكن $f:D\to\mathbb{R}$ و $c\in\widehat{D}$. إذا كانت $\lim_{x\to c}[f(x)]^2=0$ فأثبت أن $\lim_{x\to c}f(x)=0$.

أعط مثالاً لدالة f بحيث تكون $\lim_{x\to c}[f(x)]^2$ موجودة بينما $\lim_{x\to c}f(x)$ غير موجودة.

8. افرض أن $A_n \subset [0,1]$ مجموعة منتهية لكل $n \in \mathbb{N}$ وأن
$$n \neq m \Rightarrow A_n \cap A_m = \varnothing$$
لتكن $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ معرفة كما يلي
$$f(x) = \begin{cases} 1/n & x \in A_n \\ 0 & x \notin \cup_1^\infty A_n. \end{cases}$$
أثبت أن $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ لكل $c \in [0,1]$.

9. افرض أن $f,g : D \to \mathbb{R}$ وأن $c \in \widehat{D}$. إذا كانت $f(x) = g(x)$ لكل $x \neq c$ في جوار ما للنقطة c و $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ فأثبت أن $\lim_{x\to c} g(x) = \ell$.

4.2 النظريات الأساسية

نقدم في هذا البند مفهوم النهاية في ضوء العمليات الجبرية وعلاقة الترتيب على $\mathbb{R}$، الأمر الذي سيمكننا من تقرير وحساب نهاية الدالة بعد تفكيكها إلى مكوِّناتها الأولية.

نظرية 4.4

لتكن $f : D \to \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$. إذا كانت للدالة f نهاية عند c فإن f محدودة في جوار c، أي أنه يوجد جوار U للنقطة c وعدد حقيقي ثابت M بحيث
$$|f(x)| \le M \quad \forall x \in U \cap D.$$

البرهان

افرض أن $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$. من التعريف 4.1 توجد $\delta > 0$ بحيث
$$x \in D,\ 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < 1.$$

لا يكتب في
هذا الهامش

تمارين 4.1 :

(2) (أ) لنفرض أن $\varepsilon > 0$ معطاة، نود أن نوجد $\delta > 0$ بحيث

$$0<|x-c|<\delta \Rightarrow |x^3-c^3|<\varepsilon$$

$$|(x-c)(x^2+xc+c^2)|<\varepsilon$$

نبدأ بفرض أن $|x-c|<1 \Rightarrow -1<x-c<1$

(انظر ملاحظة بعد تعريف 2.1 صفحة ؟)

$$|c|+1 > c+1 > x > -1+c > -1-|c|$$

$$\Rightarrow |x|<|c|+1$$

$$\Rightarrow |x^2+xc+c^2| \le |x^2|+|x||c|+|c^2|$$

$$\le (|c|+1)^2+(|c|+1)|c|+|c|^2$$

$$= |c|^2+2|c|+1+|c|^2+|c|$$

$$= 3|c|^2+3|c|+1$$

$$|x-c|\{3|c|^2+3|c|+1\}<\varepsilon$$

$$|x-c|<\frac{\varepsilon}{3c^2+3|c|+1}$$

إذن $\delta=\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3c^2+3|c|+1}\right\}$

---

(4) (أ) نستخدم نظرية (4.2)

النهاية غير موجودة إذا وجدت متتالية $x_n \to 0$ و $f(x_n)$ غير متقاربة

مثلاً خذ $(x_n)=\frac{1}{n^2}\neq 0 \to 0$

لكن $f(x_n)=n$ غير متقاربة

(ب) خذ $x_n=\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\to 0$ ، $y_n=\frac{1}{\sqrt{(4n+1)\pi}}\to 0$ وباستخدام نتيجة 4.1 (ب)

لكن $f(x_n)=\cos 2n\pi \to 1$

$$\cos(2\pi n)=1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

و $f(y_n)=\cos\left[\frac{(4n+1)\pi}{2}\right]$

$$=\cos(4n+1)\frac{\pi}{2}=0 \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(y_n)\neq \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

حسب نتيجة 4.1 (ب) فإن $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right)$ غير موجودة

مثال 4.12

لإيجاد النهاية

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$$

لا نستطيع استخدام الجزء (iii) من النظرية 4.6، إذ أن نهاية المقام هي الصفر، لكننا نلاحظ أنه إذا كان $x\neq 2$ فإن

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\frac{x-1}{x+2}$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

تمارين 4.2

1. أعط أمثلة لدالتين g,f بحيث

(i) كل من $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ غير موجودة لكن للدالة $f+g$ نهاية عند c.

(ii) كل من $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ غير موجودة لكن $f\cdot g$ لهل نهاية عند c.

(iii) $\lim_{x\to c} g(x)=0$ و $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ موجودة.

2. إذا كانـــت $a\leq f(x)\leq b$ لكل $x\in D_f$ و $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة، فأثبت أن $a\leq \lim_{x\to c} f(x)\leq b$. مـــاذا يمكـــن قـــوله إذا كانـــت $a<f(x)<b$ لكل $x\in D_f$؟

3. لتكن $f(x)\geq 0$ لكل $x\in D_f$. إذا كانت $c\in \widehat{D_f}$ و $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$ فأثبت أن $\lim\limits_{x\to c}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\ell}$.

هل تستطيع أن تعمم هذه النتيجة للجذر من الدرجة n؟

4. احسب النهاية في كل مما يلي متى وجدت

(i) $$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{2x^2-1}{x+2}}$$

(ii) $$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2+x}$$

(iii) $$\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{1}{x}\right)$$

(iv) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1+x}}{3x-x^2}$$

(v) $$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

5. إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ و g دالة محدودة في جوار ما للنقطة c فأثبت أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x)=0$.

6. إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$ فأثبت أن $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=|\ell|$. متى يكون العكس صحيحاً؟

7. إذا كانت $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\ell$ فأثبت أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(ax)}{x}=a\ell$ لكل $a\neq 0$. ماذا يحدث لو كانت $a=0$؟ احسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

8. لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تحقق

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}.$$

أثبت أن للدالة f نهاية عند كل $c\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ للدالة f نهاية عند 0 $\Leftrightarrow$ الدالة

f محدودة في جوار ما للنقطة 0.

9. افرض أن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تحقق

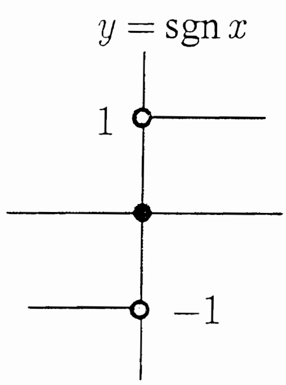
$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}$$

إذا كانت $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ موجودة فأثبت أن للدالة f نهاية عند c. أثبت أيضاً أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ وإلا فإن $f(x)=0$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

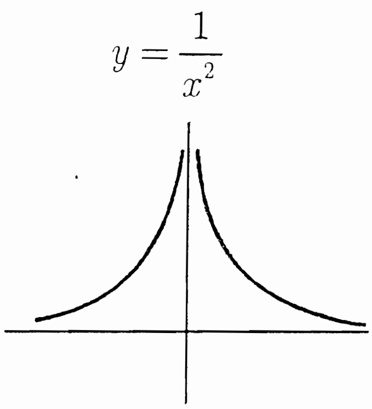
4.3 بعض الامتدادات لتعريف نهاية الدالة

في أمثلة البند 4.1 أثبتنا أن النهايات التالية غير موجودة:

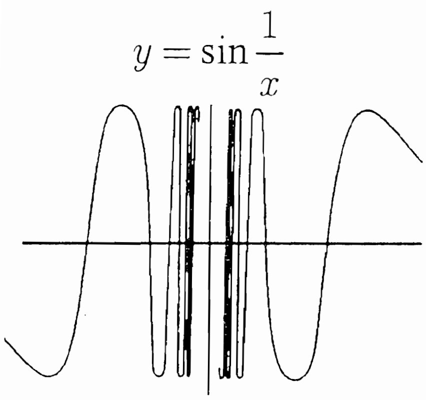
(i) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$



شكل 4.4



شكل 4.5



شكل 4.6

ولكـــن الأشكال 4.4، 4.5، 4.6 تبين أن سلوك هذه الدوال في جوار 0 مختلف، فالدالـــة في (ii) غير محدودة بينما كل من الدالتين في (i)، (iii) محدودة على مجالها. أما الفرق بين الدالتين في (i) و (iii) فيتمثل في أننا لو قصرنا المجال على $(0,\infty)$ أو

لا يكتب في
هذا الهامش

الجزء الأول برهان من نظرية (4.7)

$\boxed{\text{تمرين } 4.2}$

(2) $a < f(x) < b \Rightarrow a \le \lim f(x) \le b$

(4) (iii) غير موجودة لأن $0 \neq x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0$ ، $f(x_n)=0 \to 0$

$0 \neq y_n = \frac{2}{(4n+1)\pi} \to 0$ ، $f(y_n)=1 \to 1$

من تمرين 4.1 الجزء (iii) ⇐ النهاية غير موجودة

(6) يكون العكس صحيحاً إذا كان $\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$

(8) لاحظ أن $f(x)=f(x+c-c)$
$= f(c) + f(x-c)$

وعليه إذا كانت $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجودة فإن $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة وتساوي $f(c)+\lim_{x\to 0} f(x)$

∴ التقريران الأول والثاني متكافئتان

إذا فرضنا أن $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجودة ⇐ مبرهنة 4.4

f محدودة في جوار ما لـ 0

إذن يوجد M ∋ $|f(x)|<M$ لكل $x \in (-a,a)$ [جوار لـ 0]

~~إذن يوجد a ∋ f(x) محدودة في جوار لـ 0~~

~~لتكن~~ خذ ε أكبر من 0 واختر N بحيث $\frac{M}{N}<\varepsilon$

ضع $\delta = \frac{a}{N}$

$|x|<\delta \Rightarrow |Nx|<a$

$\Rightarrow |f(Nx)|<M$

غير صحيح من المساواة التي في السؤال ← $N|f(x)|<M \Rightarrow |f(x)|<\frac{M}{N}<\varepsilon$

$f(x+x+\dots+x) = f(x)+f(x)+\dots+f(x) = N f(x)$

(9) $f(x)=f(x+c-c)$
$= f(x-c)\cdot f(c)$

إذا كانت $\lim_{x\to 0} f(x) = l$ فإن $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة $= l\cdot f(c)$

كذلك $f(x)=f(n\cdot \frac{x}{n}) \Rightarrow f(x)=\left[f(\frac{x}{n})\right]^n$ لكل $n\in \mathbb{N}$

دع $x \to 0 \Rightarrow$ ~~f(x)~~ $\Rightarrow l^n = l \Rightarrow l=1$ أو $l=0$

افرض أن $l=0$ عندئذ $f(\frac{x}{n}) \to 0$ عندما $n \to \infty$

وعليه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $|f(\frac{x}{n})| < \frac{1}{2}$ لكل $n \ge N$

$\Rightarrow |f(x)| < (\frac{1}{2})^n \ \forall n \ge N$

$\Rightarrow f(x) = 0$

المساواة صحيحة من خاصية f في السؤال

لا يكتب في
هذا الهامش

ح تمـ 4.2 :

(7)

$\forall x_n, x_n \neq 0, x_n \to 0 \Rightarrow a x_n \to a(0) = 0$

$\frac{f(a x_n)}{a x_n} \longrightarrow l \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{f(a x_n)}{x_n} \to l$

$\Rightarrow \frac{f(a x_n)}{x_n} \longrightarrow a \cdot l \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(ax)}{x} = a l$

إذا كانت $a = 0 \Leftarrow$ $\frac{f(ax)}{x} = \frac{f(0)}{x}$

احتمالان

$f(0) = 0$ ، $f(0) \neq 0$

$0 \leftarrow 0 = \frac{0}{x}$

$\frac{f(0)}{x} \longrightarrow \pm\infty$ ($f(0)$ موجب أو سالب)

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3 \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 3(1) = 3$

(9)

$\forall x, c \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = f(x - c + c) = f(x-c)\, f(c)$

$l = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x - c \to 0} f(x-c) = \lim_{x \to c} f(x-c)$

$\Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} f(x-c) \cdot \lim_{x \to c} f(c)$

$= l \cdot f(c) \in \mathbb{R}$

$f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0) = [f(0)]^2, \quad f(0) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(0) = 0$ or $f(0) = 1$

$\Downarrow$

$f(x) = f(x+0) = f(x)\, f(0) = 0$

$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} 0 = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$

$\cancel{= f(c)}$

put $c = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

$1 = f(0) = f(x - x) = f(x)\, f(-x)$

$f(-x) = f(x)$ لأن ... $\Leftarrow$

$\forall x_n \neq 0 \to 0 \Rightarrow$

$-x_n \to 0$

$f(x_n) \to 0 \wedge f(-x_n) \to 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(-x) = l$

$\Rightarrow 1 = l^2 \wedge (l = 0 \text{ or } l = 1)$

$\Rightarrow l = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$

لنـــرى هـــذا افرض أننا أعطينا $0<\varepsilon$. لكي نحقق $\left|\frac{1}{x^2}-0\right|<\varepsilon$ يكفينا أن نجعل $x^2<\frac{1}{\varepsilon}$. لنأخذ $M=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$، عندئذ

$$x>M \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2}-0\right|<\varepsilon$$

كما نبتغي.

لاحظ كذلك أن $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

4.3 تمارين

1. اكتب نصوص وبراهين رصيفات النظريات 4.1 إلى 4.8 بالنسبة للنهاية اليمنى والنهاية اليسرى.

2. لتكن $f,g:D\to\mathbb{R}$ و $c\in\widehat{D}$. إذا كان هنالك جوار U للنقطة c بحيث

$$f(x)\le g(x) \quad \forall x\in D\cap U\setminus\{c\}$$

فأثبت ما يلي

(i) إذا كانت $\lim_{x\to c}f(x)=\infty$ فإن $\lim_{x\to c}g(x)=\infty$

(ii) إذا كانت $\lim_{x\to c}g(x)=-\infty$ فإن $\lim_{x\to c}f(x)=-\infty$

3. ما المقصود بما يلي إذا كانت $f:D\to\mathbb{R}$ و $c\in\widehat{D}$؟

(i) $\lim_{x\to c^+}f(x)=\infty$

(ii) $\lim_{x\to c^+}f(x)=-\infty$

(iii) $\lim_{x\to c^-}f(x)=\infty$

(iv) $\lim_{x\to c^-}f(x)=-\infty$

4. ما معنى العبارات التالية؟

(i) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

(iii) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

(iv) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

5. احسب النهايات اليمنى و اليسرى، إن وجدت:

(i) $\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}$

(ii) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

(iii) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

(iv) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-5x+7}{2x^3+4x^2-1}$

(v) $\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$ حيث p و q كثيرتا حدود.

(vi) $\lim_{x\to 0} x[x]$

(vii) $\lim_{x\to 1} x[x]$

6. أورد نص وبرهان نظرية مماثلة لنظرية 4.1 في حالة $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

7. لتكن $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$. أثبت أن

$$\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=\ell.$$

8. ليكن D جواراً للنقطة ∞ وافرض أن $f,g:D\to\mathbb{R}$. إذا كانت

$$g(x)>0 \quad \forall x\in D$$

وكانت

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell>0$$

فأثبت أن

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty\Leftrightarrow\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty.$$

ماذا يمكن أن نقول إذا كانت $\ell<0$؟

9. لتكن $\lim_{x\to c}f(x)=\ell$ و $\lim_{x\to c}g(x)=\infty$. إذا كان $\ell>0$ فأثبت أن $\lim_{x\to c}f(x)g(x)=\infty$.

ماذا يحدث لو كان

(i) $\ell<0$

(ii) $\ell=0$؟

4.4 الدوال المطردة

تعريف 4.5

لتكن $f:D\to\mathbb{R}$. سنقول إن f **متزايدة** (increasing) إذا كان

$$x,y\in D,\ y>x\Rightarrow f(y)\geq f(x)$$

ونقول إن f **متزايدة فعلاً** (strictly increasing) إذا كان

$$x,y\in D,\ y>x\Rightarrow f(y)>f(x).$$

ومن جهة أخرى تسمى الدالة f **متناقصة** (decreasing) إذا كان

$$x,y\in D,\ y>x\Rightarrow f(y)\leq f(x)$$

و**متناقصة فعلاً** (strictly decreasing) إذا كان

$$x,y\in D,\ y>x\Rightarrow f(y)<f(x).$$

تمرين 4.3 :

(7)

$$\forall x_n,\ x_n \neq 0,\ x_n \to 0 \Rightarrow a x_n \to a(0) = 0$$

$$\frac{f(a x_n)}{a x_n} \longrightarrow l \Longrightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{f(a x_n)}{x_n} \to l$$

$$\Rightarrow \frac{f(a x_n)}{x_n} \longrightarrow a \cdot l \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(ax)}{x} = a l$$

إذا كانت $a = 0 \Leftarrow$ $\quad \frac{f(ax)}{x} = \frac{f(0)}{x}$

ثابت | إما

$f(0) = 0$ $\qquad\qquad$ $f(0) \neq 0$

$$0 \longleftarrow 0 = \frac{0}{x} \qquad\qquad \frac{f(0)}{x} \longrightarrow \pm\infty \ (f(0) \text{ حسب إشارة})$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3 \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 3(1) = 3$$

---

(9)

$$\forall x, c \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = f(x - c + c) = f(x-c) \cdot f(c)$$

$$l = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x - c \to 0} f(x-c) = \lim_{x \to c} f(x-c)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} f(x-c) \cdot \lim_{x \to c} f(c)$$

$$= l \cdot f(c) \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0) = [f(0)]^2,\ f(0) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(0) = 0 \quad \text{or} \quad f(0) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = f(x+0) = f(x) \cdot f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} 0 = 0 \ \forall c \in \mathbb{R} \quad \cancel{= f(c)}$$

Put $c = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

$$1 = f(0) = f(x - x) = f(x) \cdot f(-x)$$

$\Leftarrow f(x)$ و $f(-x)$ لا ينعدمان أبداً

$$\forall x_n \neq 0 \longrightarrow 0 \Rightarrow -x_n \longrightarrow 0$$

$$f(x_n) \to 0 \ \wedge\ f(-x_n) \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(-x) = l$$

$$\Rightarrow 1 = l^2 \wedge (l = 0 \text{ or } l = 1)$$

$$\Rightarrow l = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$$

لا يكتب في
هذا الهامش

$\boxed{\text{تمارين } 4.3}$

5 (أ،ب) $\lim_{x\to 1^{+}} x[x] = 1$, $\lim_{x\to 1^{-}} x[x] = 0$

8 اكتب $g(x)$ ، $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\, g(x)$ و $g(x) = \frac{g(x)}{f(x)}\, f(x)$

لا يكتب في
هذا الهامش

تمارين 4.4

(٢) خذ أي $N \in \mathbb{N}$

بما أن f غير محدودة من أعلى على (a,b) فيوجد $c \in (a,b)$ بحيث
$f(c) > N$. ضع $\delta = b - c$

عندئذ

$$0 < b - x < \delta \Rightarrow x > c \Rightarrow f(x) \geq f(c) > N$$

(٤) اثبتنا أن $f(q) = mq$ لكل $q \in \mathbb{Q}$ حيث $m = f(1)$

نختار متتاليتين مطردتين (p_n) و (q_n) بحيث $q_n \to c^+$ و $p_n \to c^-$

بما أن $\lim_{x \to c^+} f(x)$ ، $\lim_{x \to c^-} f(x)$ موجودتان (مبرهنة 4-4-?)

فإن

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim f(p_n) \quad \text{و} \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = \lim f(q_n)$$

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = mc$$

$$\Leftarrow \quad f(c) = mc$$

1:30

ولكن، من تعريف A_n ، فإن

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(x_i^+\right)-f\left(x_i^-\right)\right]>n\frac{f(b)-f(a)}{n}=f(b)-f(a)$$

وهذا التناقض نشأ من الافتراض بأن عدد عناصر A_n أكبر من أو يساوي n. إذن عدد عناصر A_n أقل من n . $\square$

تمارين 4.4

1. أثبت أن الدالة المطردة فعلاً متباينة ومعكوسها دالة مطردة فعلاً.
2. إذا كانت f متزايدة على (a,b) وغير محدودة من أعلى على (a,b)، فأثبت أن $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$. ماذا يمكنك القول لو كانت f متناقصة على (a,b).
3. إذا كانـــت f ، g متزايدتين على D فأثبت أن $f+g$ متزايدة على D. إذا كانـــت بالإضـــافة إلى ذلك $f(x)\geq 0$ ، $g(x)\geq 0$ لكل $x\in D$ فأثبت أن $f\cdot g$ متزايدة على D .

   لـــتكن $D=[0,1]$ ، $f(x)=x$ ، $g(x)=1-x$. أثبت أن كلاً من f و g دالة مطردة ولكن $f\cdot g$ ليست مطردة.
4. لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تحقق

$$f(x+y)=f(x)+g(y)\quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}.$$

   إذا كانت f مطردة فأثبت وجود $m\in\mathbb{R}$ بحيث

$$f(x)=mx\quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

   (أثبت أولاً أن $f(q)=mq$ لكل $q\in\mathbb{Q}$).

لا يكتب في
هذا الهامش

تمارين $\boxed{4.4}$

(4) مراحل الإثبات:

مرحلة 1: إذا كان $x=n\in N$ فإن $\overset{??}{\Leftarrow}$ $f(n)=nf(1)$

إذا كان $n=1$ ⇐ $f(1)=1\cdot f(1)$، إذا كان $n=2$ ⇐

$f(2)=f(1)+f(1)=2f(1)$ ، نفرض صحة العبارة من أجل n

$$f(n+1)=f(n)+f(1)=nf(1)+f(1)=(n+1)f(1)$$

⇐ العبارة صحيحة من أجل كل n

مرحلة 2: إذا كان $x=-n$ ، $n\in N$ فإن $\overset{??}{\Leftarrow}$ $f(-n)=-nf(1)$

بشكل عام $f(-x)=-f(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}$ لأن

$$0=f(x-x)=f(x)+f(-x)\Rightarrow f(-x)=-f(x)$$

$$\Rightarrow f(-n)=-f(n)=-(n\cdot f(1))=(-n)f(1)$$

مرحلة 3: إذا كان $x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ ⇐ $f(p)=pf(1)$

وأيضاً

$$f(p)=f\left(q\frac{p}{q}\right)$$

$$=\underbrace{f\left(\tfrac{p}{q}\right)+f\left(\tfrac{p}{q}\right)+\cdots+f\left(\tfrac{p}{q}\right)}_{q\ \text{مرة}}$$

$$=qf\left(\tfrac{p}{q}\right)$$

إذاً $pf(1)=qf\left(\frac{p}{q}\right)$ ⇐

$$f\left(\tfrac{p}{q}\right)=\tfrac{p}{q}f(1)$$

مرحلة 4: إذا كان $x\in\mathbb{R}$ ⇐ يوجد متتالية $(r_n)\in\mathbb{Q}$ بحيث $r_n\to x$ (من كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$)

لكن f مطردة وبالتالي محدودة في جوار الصفر، ومن ما ثبت سابقاً نجد أن $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$ ومن ثم $\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$ لكل $c\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(r_n)\longrightarrow f(x)\Rightarrow \lim_{n\to\infty}f(r_n)=f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}r_n f(1)=f(x)\Rightarrow f(1)\cdot x=f(x)$$

وهو المطلوب

لا يكتب في
هذا الهامش

اختبار (5)

الرقم الجامعي:

س1: هات مثالاً للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ مطردتين على الفترة $[0,1]$ لكن ضربهما $(fg)(x)$ دالة غير مطردة على " "

س2: إذا كانت f متناقصة على (a,b) وغير محدودة من أسفل على (a,b)، فأثبت أن: $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

الإجابات:

$f:D\to\mathbb{R}$ في بعـــض الأحيان **نقاطاً شاذة** (singular points) للدالة f. وبناء علـــى مـــا تقـــدم، إذا كانت c نقطة شاذة للدالة f فإنها قابلة للإزالة إن كانت $\lim_{x\to c} f(x)$ موجـــودة، وذلـــك بإعـــادة تعريف الدالة عند c، وإلا فإنها غير قابلة للإزالة.

تمارين 5.1

1. اكتب تفاصيل برهان النتيجة 5.1.
2. أوجد مجال الاتصال لكل من الدوال التالية المعرفة على $\mathbb{R}$.

(i) $f(x)=|x|$

(ii)
$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

(iii)
$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\sin x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

3. عين نقاط عدم الاتصال لكل من الدوال في تمرين 2 وبين نوعه.
4. إذا كانت الدالة f المعرفة على $(-1,1)$ تحقق

$$|f(x)|\le|x| \quad \forall x\in(-1,1)$$

فأثبت أن f متصلة عند $x=0$.

5. أعـــط مثالاً لدالة $f:D\to\mathbb{R}$ غير متصلة عند $c\in D$، ولكن قيمتها المطلقة $|f|$ المعرفة على D بالمساواة

$$|f|(x)=|f(x)| \quad \forall x\in D$$

متصلة عند c.

6. أعط مثالاً لدالة $f:D\to\mathbb{R}$ غير متصلة عند كل نقطة في D، ولكن $|f|$ متصلة على D.

7. إذا كانت $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة عند $c\in D$ فأثبت أن $|f|$ متصلة عند c.

8. عرف كلاً من الدوال التالية عند $x=0$ بحيث تصبح متصلة عند هذه النقطة إن أمكن:

(i) $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin 3x,\ x\neq 0$

(ii) $g(x)=\dfrac{1}{x}\sin x^2,\ x\neq 0$

(iii) $h(x)=\dfrac{1}{x}\sin\sqrt{x},\ x\neq 0$

(iv) $b(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}\sin x\ \ x\neq 0$

9. تسمى الدالة $f:D\to\mathbb{Z}$ المعطاة بالقاعدة $f(x)=[x]$ **الدالة الدرجية**. أوجد مجال الاتصال لكل من الدوال التالية

(i) $f(x)=[x]$

(ii) $g(x)=x[x]$

(iii) $h(x)=[\sin x]$

10. إذا كانت $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة فأثبت أن المجموعة $\{x\in D: f(x)=0\}$ مغلقة في D.

11. افرض أن $f:D\to\mathbb{R}$ وأن g هي مقصور f على E حيث $E\subset D$.

(i) إذا كانت f متصلة عند $c\in E$ فأثبت أن g أيضاً متصلة عند c.

(ii) أعط مثالاً يبين أن اتصال g عند c لا يقتضي اتصال f عند c.

12. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ متصلة وكان
$$f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{Q}$$
فأثبت أن
$$f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

13. افرض أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ تحقق
$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$
إذا كانت f متصلة عند $x=0$ فأثبت أنها متصلة على $\mathbb{R}$.

14. افرض أن $f:D\to[0,\infty)$.
إذا كانت f متصلة على D فأثبت أن الدالة $\sqrt{f}$ المعرفة على D بالمساواة $\sqrt{f}\,(x)=\sqrt{f(x)}$ هي الأخرى متصلة على D.

15. يقال إن لكثيرة الحدود q **صفراً من الدرجة** m عند $x=c$، حيث $m\in\mathbb{N}$، إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to c} q(x)/(x-c)^m$ موجودة وتختلف عن 0.
إذا كان c صفراً من الدرجة m لكثيرة الحدود q فأثبت أن بالإمكان تعريف الدالة النسبية p/q بحيث تكون متصلة عند هذه النقطة إذا وفقط إذا كان c صفراً لكثيرة الحدود p من الدرجة k حيث $k\geq m$.

16. لتكن f مطردة على (a,b). استخدم معلوماتك من البند 4.4 لإثبات أن عدم اتصال f عند أي نقطة $c\in(a,b)$ هو من نوع القفزة.
إذا عُرِّفت الدالة f عند a و b بحيث تصبح مطردة على $[a,b]$ فماذا يمكن أن نقول عن عدم اتصالها عند هاتين النقطتين؟

17. إذا كانت f مطردة على الفترة I فأثبت أن نقاط I التي لا تكون عندها f متصلة تشكل مجموعة قابلة للعد.

لا يكتب في
هذا الهامش

تمارين 5.1 :

(4) نضع $x = 0$ لدينا $f(0) = 0$ ... $|f(0)| \le 0$

$\Rightarrow |f(0)| = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

وبشرط السابق نجد

$\lim_{x \to 0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

(10) نفرض أن (x_n) متتالية في المجموعة $A = \{x : f(x) = 0\}$ بحيث $x_n \to x \in D$

$f(x) \longleftarrow f(x_n) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in A \Rightarrow A$ مغلقة

نظرية 5.1   نظرية 3.18 (iii)

(13) انظر x_1 كشاهد في تعريف A مجموعة نقاط ... خذ لو أمكن $f(x) = mx$

(انظر الشكلين 5.10، 5.11)

لاحــظ أن مجــال f في هذا المثال ليس فترة كما تتطلب النظرية 5.8. في النظرية 5.16 سنقدم شرطاً من نوع آخر لنضمن اتصال f^{-1}.

تمارين 5.3

1. إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ متصلة وتحقق التالي:
لكل $x\in[a,b]$ يوجد $y\in[a,b]$ بحيث
$$|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|$$
فأثبت وجود $c\in[a,b]$ بحيث $f(c)=0$.
2. إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ متصلة وتحقق
$$f(x)>0 \quad \forall\, x\in[a,b]$$
فأثبت وجود $\alpha>0$ بحيث
$$f(x)>\alpha \quad \forall\, x\in[a,b]$$
3. أعط مثالاً لكثيرة حدود ليس لها جذر حقيقي.
4. أعط مثالاً لدالة $f:[0,1]\to[0,1]$ ليس لها نقطة ثابتة.
5. افــرض أن f، g دالــتان متصــلتان علــى $[a,b]$ وأن $f(a)\ge g(a)$، $f(b)\le g(b)$. أثبت أن هنالك $x_0\in[a,b]$ بحيث $f(x_0)=g(x_0)$.
6. أثبت أن للمعادلة $\cos x=x$ حلاً في $(0,\pi/2)$.
7. أثبت أن للمعادلة $x2^x=1$ حلاً في $(0,1)$.
8. تــدل النظرية 5.6 على أن الدالة المتصلة على فترة تتمتع بالخاصة البينية. أثبت

أن العكس غير صحيح بصفة عامة، وذلك بإثبات أن الدالة

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

تحقق الخاصة البينية على $\mathbb{R}$.

9. عيِّن فترة في $\mathbb{R}$ طولها 1 تحتوي حلاً للمعادلة

$$xe^{x}=1$$

10. عين فترة في $\mathbb{R}$ طولها $\frac{1}{2}$ تحتوي جذراً للمعادلة

$$x^{3}-6x+2.5=0$$

احسب الحل مقرباً لمنزلتين عشريتين باستخدام طريقة التنصيف التي استعملناها في المثال 5.13.

11. لتكن f متصلة على $[0,1]$ وافرض أن $f(0)=f(1)$. أثبت وجود $c\in[0,1/2]$ بحيث $f(c)=f(c+1/2)$.

إرشاد: استخدم الدالة $g(x)=f(x)-f(x+1/2)$.

استنتج من ذلك أن على خط الاستواء في الكرة الأرضية نقطتين متناظرتين (على استقامة مع مركز الكرة الأرضية) حيث تتساوى درجة الحرارة، وذلك بافتراض أن درجة الحرارة متصلة على خط الاستواء.

12. لتكن الدالة f معرفة على $[0,\pi/2]$ بالقاعدة

$$f(x)=\max\left\{x^{2},\cos x\right\}.$$

أثبت أن للدالة f قيمة صغرى عند نقطة ما $c\in[0,\pi/2]$ وأن c تحقق المعادلة $\cos x=x^{2}$.

13. افرض أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ متصلة وأن

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

أثبت أن f محدودة على $\mathbb{R}$ وأن لها على الأقل قيمة قصوى واحدة. أعط مثالاً يبين أنه قد لا يكون للدالة f قيمة عظمى وقيمة صغرى معاً.

5.4 الاتصال المنتظم

لتكن $f : D \to \mathbb{R}$ دالة متصلة. إذا كان $c \in D$ فإن التعريف 5.1 ينص على أن لكل $\varepsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in D,\ |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(c)| < \varepsilon. \tag{5.11}$$

من الواضح أن العدد δ يعتمد على ε ويتحدد بمعرفته، طالما أننا نتحدث عن نقطة واحدة c. ولكن عندما ننتقل إلى نقطة أخرى $c' \in D$ فقد لا يفي هذا العدد δ بالغرض المنشود، ونضطر حينذاك لاختيار عدد آخر $\delta' > 0$ يختلف عن δ لنحقق الاقتضاء اللازم لاتصال f عند c'، أي

$$x \in D,\ |x-c'| < \delta' \Rightarrow |f(x)-f(c')| < \varepsilon.$$

على هذا ينبغي أن نأخذ في الاعتبار إمكانية اعتماد δ على النقطة c، ولإبراز هذا الاعتماد يفضل أن نكتب $\delta(\varepsilon,c)$ بدلاً عن δ. سنوضح الأمر بالمثال التالي:

لنعرف الدالة $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ بالقاعدة

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

من المؤكد أن f متصلة على $(0,1)$ إذ أن هذه الفترة لا تحوي أياً من أصفار مقامها. لكن لنفرض أن $\varepsilon > 0$ أعطيت لنا ونريد أن نختار δ بما يحقق الاقتضاء (5.11) عند c. لاحظ أن

لا يكتب في هذا الهامش

مجموعة تمارين 5.3

(٩) ضع $\alpha = \min(f[a,b])$

(١٠) ضع $f(x) = \cos x - x$ ، وطبق نظرية القيمة البينية

(١٢) $f_1(x) = x^2$ ، $f_2(x) = \cos x$ — $f = \frac{1}{2}\{f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|\}$

(سؤال ٣ مجموعة 5.2)

⇐ f متصلة ⇐ (نظرية 5.5) لها قيمة صغرى $f(c)$ على $[0, \frac{\pi}{2}]$ مغلقة ومحدودة

* الحصول على النقطة التي تحصل عندها القيمة الصغرى:

لاحظ أن $f_1(0) - f_2(0) = -1$ و $f_1(\frac{\pi}{2}) - f_2(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}$

⇐ توجد $d \in (0, \frac{\pi}{2})$ بحيث $f_1(d) = f_2(d)$

لكن f_1 متزايدة و f_2 متناقصة ⇐

$$f(x) = \begin{cases} f_2(x), & x < d \\ f_1(x), & x > d \end{cases} \Leftarrow f(d) \text{ قيمة صغرى}$$

ملاحظة: d تحقق المعادلة $\cos x = x^2$

التفصيل: نبدأ $x < d \Leftarrow f_2(x) > f_2(d)$

$= f_1(d) > f_1(x) \Rightarrow f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\} = f_2(x)$

كذلك $x > d \Leftarrow f_1(x) > f_1(d)$

$= f_2(d)$

$> f_2(x) \Rightarrow f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\} = f_1(x)$

$f_2(x) > f_2(d) =$ [illegible] $f(d)$

$f_1(x) > f_1(d)$
$= f_2(d)$

(١٣) افرض $\varepsilon = 1$ ثم اختر N بحيث $|x| \geq N \Rightarrow |f(x)| \leq 1$

بما أن f متصلة على $[-N, N]$ فإن هناك K بحيث $|f(x)| \leq K$ (نظرية 5.4)

لكل $x \in [-N, N]$ ⇐ $|f(x)| \leq K + 1$ لكل $x \in \mathbb{R}$

لتكن $c = \inf R_f$ ، $d = \sup R_f$. اختر متتاليتين (a_n) و (b_n) في $\mathbb{R}$

بحيث $f(a_n) \to c$ ، $f(b_n) \to d$. إذا كانت (a_n) [و (b_n)] محدودة

فبإمكاننا اختيار متتالية جزئية منها بحيث $a_{n_k} \to a$ [أو $b_n \to b$] (مبرهنة 3.13) ⇐ (نظرية 3.12)

$c = \lim f(a_{n_k}) = f(a)$ ولكن $f(a)$ قيمة صغرى

[و $f(b) = \lim f(b_n) = d$ ولكن $f(b)$ قيمة عظمى]

لا يكتب في
هذا الهامش

تمارين 5.3 :

① $\forall x \in [a,b] = I : \exists y_1 \in I \text{ s.t } |f(y_1)| \le \frac{1}{2}|f(x)|$

$\Rightarrow |\frac{1}{2} f(y_1)| \le \frac{1}{2^2}|f(x)|$

∵ $y_1 \in I : \exists y_2 \in I \text{ s.t } |f(y_2)| \le \frac{1}{2}|f(y_1)| \le \frac{1}{2^2}|f(x)|$

$\Rightarrow \frac{1}{2}|f(y_2)| \le \frac{1}{2^3}|f(x)|$

⋮

$y_1, y_2, \dots, y_n \in I \ni |f(y_n)| \le \frac{1}{2^n}|f(x)|$

∵ $y_n \in I : \exists y_{n+1} \in I \text{ s.t } |f(y_{n+1})| \le \frac{1}{2}|f(y_n)| \le \frac{1}{2^{n+1}}|f(x)|$

∴ أنشئنا متتالية (y_n) في I بحيث : $|f(y_n)| \le \frac{1}{2^n}|f(x)| \ \forall x \in I$

$0 \le |f(y_n)| \le \frac{1}{2^n}|f(x)|$

$\downarrow 0 \qquad \to 0$

نظرية الساندوتش للمتتاليات $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |f(y_n)| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(y_n) = 0$

وبما أن I محدودة ⇐ (y_n) متتالية محدودة ⇐ يوجد لها متتالية جزئية متقاربة
$(y_{n_k}) \to l$ ولنفرض أن f متصلة ⇐ $f(x_{n_k}) \to f(l)$
بما أن I مغلقة و $y_{n_k} \in I$ لكل k ⇐ $l \in I$

$f(x_{n_k}) \to 0$ لأن $f(y_{n_k})$ جزئية من $f(y_n) \to 0$
⇐ $f(l) = 0$ و $l \in I$
⇐ l هو العدد c المطلوب في السؤال

(٨) (أ) نعلم أن الدالة المتصلة على فترة مغلقة ومحدودة تحقق الخاصية البينية
لذلك فإن الدالة f تحقق الخاصية البينية على كل فترة لا تحوي الصفر
وذلك لأننا نستطيع تكوين فترة مغلقة ومحدودة في مجال f ناتجة
من أخذ الصورة العكسية

لتكن لدينا الفترة $[a,b]$ بحيث $0 \in [a,b]$ ولتكن
$f(a) < \lambda < f(b)$ أو $f(b) < \lambda < f(a)$
إذا كانت $\lambda = 0$ ⇐ خذ $c = 0$
⇐ $\lambda \ne 0$ ⇐ ضع $\lambda = \sin\frac{1}{t}$ ⇐ $t \in \left\{\frac{1}{\sin^{-1}\lambda}\right\}$

لا يكتب في
هذا الهامش

أما إذا كانت (a_n) و (b_n) غير محدودتين فإننا نستطيع اختيار متتاليتين جزئيتين $a_{n_k}, b_{n_k} \to \pm\infty$ بحيث

$\Leftarrow$ $c = d = 0$ وبما أن R_f فترة غير خالية طرفاها c, d

$\Leftarrow$ $R_f = \{0\}$ $\Leftarrow$ $f = 0$

خذ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\Leftarrow$ متصلة على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

لكن $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \neq 0$

إذاً $f' \neq 0$

$0 \to f(u_n)-f(x_n)$، وعليه فإن $f(u_n)\to g(x)$.

واضـــح أن g تمديـــد للدالـــة f إلى $\overline{D}$، ولم يبق إلا إثبات أنها منتظمة الاتصال. افرض أن $\varepsilon > 0$. من اتصال f المنتظم على D نعلم أنه يوجد $\delta > 0$ تحقـــق الاقتضـــاء (5.15). لنفرض الآن أن $x,t \in \overline{D}$ وأن $|x-t|<\delta/3$. هناك متتاليـــتان (x_n)، (t_n) في D بحـــيث $x_n \to x$ ، $t_n \to t$، ومن التعريف (5.17) للدالة g فإن $f(x_n)\to g(x)$ ، $f(t_n)\to g(t)$. إذن يوجد $N' \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\begin{aligned} n \geq N' \Rightarrow & |x_n - x| < \delta/3,\ |t_n - t| < \delta/3, \\ & |f(x_n)-g(x)| < \varepsilon,\ |f(t_n)-g(t)| < \varepsilon. \\ \Rightarrow & |x_n - t_n| \leq |x_n - x| + |x-t| + |t-t_n| < \delta \end{aligned} \tag{5.18}$$

وبالنظر إلى (5.15) فإن

$$|f(x_n)-f(t_n)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N'. \tag{5.19}$$

من (5.18) و (5.19) نرى الآن أن لأي $n \geq N'$

$$|g(x)-g(t)| \leq |g(x)-f(x_n)| + |f(x_n)-f(t_n)| + |f(t_n)-g(t)| < 3\varepsilon$$

لكل $t,x \in \overline{D}$ بحيث $|x-t|<\delta/3$. وهذا يعني أن g متصلة بانتظام على $\overline{D}$. □

5.4 تمارين

1. عين الدوال المتصلة بانتظام من بين الدوال التالية

(i) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ، $D_f=(0,\infty)$

(ii) $g(x)=\sqrt[3]{x}$ ، $D_g=\mathbb{R}$

(iii) $h(x)=x^{3/2}$ ، $D_h=[0,\infty)$

2. أثبت أن الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

3. إذا كانت كل من f و g متصلة بانتظام على D فأثبت أن $f+g$ أيضاً متصلة بانتظام على D. هات مثالاً يوضح أن الدالة $f\cdot g$ ليست بالضرورة متصلة بانتظام.

4. إذا كانت كل من f و g متصلة بانتظام ومحدودة على D فأثبت أن $f\cdot g$ هي الأخرى متصلة بانتظام.

5. إذا كانت $f:D\to E$ ، $g:E\to\mathbb{R}$ دالتين متصلتين بانتظام، فهل الدالة $g\circ f:D\to\mathbb{R}$ متصلة بانتظام؟

6. لتكن

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

(i) أثبت أن f متصلة بانتظام على أي مجموعة محدودة في $\mathbb{R}$.

(ii) هل f متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$؟

7. لقد رأيت في برهان النظرية 5.11 أنه لو كانت $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة بانتظام وكانت (x_n) متتالية من نوع كوشي، فإن $(f(x_n))$ هي أيضاً من نوع كوشي. هات مثالاً يوضح أهمية شرط انتظام الاتصال لصحة هذا التقرير.

8. أثبت أن الدالة المتصلة بانتظام على فترة محدودة هي دالة محدودة.

9. يقال إن الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ تحقق **شرط ليبشتز** (Lipschitz condition) إذا كان هنالك عدد ثابت $k>0$ بحيث

$$|f(x)-f(t)|\leq k|x-t| \quad \forall\, x,t\in D.$$

أثبت أن كل دالة تحقق شرط ليبشتز هي دالة متصلة بانتظام.

باستخدام الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ على $[0,\infty)$ أثبت أن العكس غير صحيح.

10. أثبت أن الدالة $f(x)=x\sin x$ ليست متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

11. تســمى الدالـــة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **دورية** (periodic) إذا وجد عدد ثابت $T>0$ بحيث

$$f(x+T)=f(x) \quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

إذا كانت الدالة f متصلة ودورية على $\mathbb{R}$ فأثبت أن اتصالها منتظم.

5.5 المجموعات المتراصة والاتصال

ســـنتحدث في هذا البند عن أحد المفاهيم التحليلية ذات الأثر العميق، والتي تلعـــب دوراً أساســـياً في فهم وصياغة نظريات الاتصال، لا سيما في الفضاءات التبولوجـــية الأعـــم من $\mathbb{R}$، وهو مفهوم **التَّراص** (compactness). سنسعى من خلال هذا العرض السريع إلى تعريف المجموعة المتراصة وتشخيصها في $\mathbb{R}$، ثم نعيد النظر في خواص الاتصال في ضوء هذا التعريف بهدف الوصول إلى تشخيص تحليلي أكثر عمومية وعمقاً.

افـــرض أن G_λ مجمـــوعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ لكل $\lambda\in\Lambda$، حيث Λ مجموعة تـــرقيم (index set)، قد تكون منتهية وقد لا تكون، وإذا كانت غير منتهية فقد تكـــون قابلة للعد (مثل $\mathbb{N}$) وقد لا تكون (مثل $\mathbb{R}$). إذا كانت E مجموعة من الأعـــداد الحقيقية بحيث يكون $E\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ فإن المجموعة $\{G_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ تسمى **غطاءً مفتوحاً** (open cover) للمجموعة E. كما يقال إن $\{G_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ **تغطي**

لا يكتب في هذا الهامش

$\boxed{\text{تمارين } 5.4}$

(1)

(ii) غير متصلة بانتظام على $[0,\infty)$ ؛ $x_n = \frac{1}{n}$ و $y_n = \frac{1}{2n}$ في $[0,\infty)$

باستخدام مبرهنة (5.4) [5.4 تمرين]

ولكن $|y_n - x_n| = \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right| = \left|-\frac{1}{2n}\right| \to 0$

$$|f(y_n) - f(x_n)| = |4n^2 - n^2| = |3n^2| = 3n^2 \not\to 0$$

$\Leftarrow$ f غير متصلة بانتظام على $[0,\infty)$

(iii) $x_n = n^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$, $y_n = n^{\frac{2}{3}}$

(5) نعم

(6) (أ) بما أن $E \subseteq \mathbb{R}$ محدودة $\Leftarrow$ توجد فترة $[a,b]$ بحيث $E \subseteq [a,b]$

f متصلة على $[a,b]$ $\Leftarrow$ f متصلة بانتظام على $[a,b]$ (نظرية 5.10)

$\Leftarrow$ f متصلة على E

(ب) نعم. يكفي أن نثبت أن f متصلة بانتظام على $[-1,1]^c$

بالتعريف

$$x,t \in [-1,1]^c \quad |f(x) - f(t)| = \left|x \sin\frac{1}{x} - t\sin\frac{1}{t}\right|$$

$$= \left|x\sin\frac{1}{x} - t\sin\frac{1}{x} + t\sin\frac{1}{x} - t\sin\frac{1}{t}\right|$$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{t}$

$\frac{t+x}{tx}$

$$\le |x-t|\left|\sin\frac{1}{x}\right| + |t|\left|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{t}\right|$$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{t}$

$$\le |x-t| \cdot 1 + |t|\left|2\cos\left(\frac{t+x}{2tx}\right)\sin\left(\frac{t-x}{2xt}\right)\right|$$

$|\sin u| \le u$

$\forall u \in \mathbb{R}$

$$\le |x-t| + |t| \cdot 2(1)\frac{|t-x|}{2|t||x|}$$

$$= |x-t| + \frac{1}{|x|}|t-x|$$

$|x| > 1$

$\frac{1}{|x|} < 1$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{|x|} < 2$

$$= |x-t|\left(1 + \frac{1}{|x|}\right) < |x-t|(2) < \epsilon$$

$$|x-t| < \frac{\epsilon}{2}$$

نختار

$$\delta = \frac{\epsilon}{2}$$

(7) $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ ، $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $x_n = \frac{1}{n}$ (كوشي)

لكن $f(x_n) = n$ غير كوشي لأنها غير متقاربة

غير متصلة بانتظام $f(x) = \frac{1}{x}$

لا يكتب في
هذا الهامش

$\boxed{\text{تمارين } 5.4}$:

(9) لكل $0 < \varepsilon$ يوجد $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ بحيث:

$$x, t \in D,\ |x - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| \le K|x - t|$$
$$< K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

$\Leftarrow f$ متصلة بانتظام على D .

$f(x) = \sqrt{x}$ متصلة بانتظام على $[0, \infty)$ (أنظر مثال 5.20 في الكتاب)
لكن f لا تحقق شرط ليبشتز لأنه:

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{t}\right| = \frac{|x - t|}{\sqrt{x} + \sqrt{t}}$$

ضع $t = 0$ ، لا يوجد k بحيث:

$$\left|\sqrt{x}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x}} \le k|x|$$

~~(11) f متصلة على $[-T, T]$ (فترة مغلقة ومحدودة)~~
~~$\Leftarrow f$ متصلة بانتظام على $[-T, T]$~~

لا يكتب في
هذا الهامش

① لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ متصلة بانتظام ، I محدودة
توجد g امتداد لـ f و متصلة على $\bar{I}$ (مبرهنة 5.11)
$\Longleftarrow$ g محدودة (مبرهنة 5.4)
$\Longleftarrow$ f محدودة

②

① (مبرهنة 5.9) خذ $x_n = 2n\pi$ ، $y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$ في $\mathbb{R}$
لكن $|y_n - x_n| = |\frac{1}{n}| \longrightarrow 0$

$$|f(y_n) - f(x_n)| = \left|\left(2n\pi + \frac{1}{n}\right)\sin\left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) - 2n\pi \underbrace{\sin(2n\pi)}_{0}\right|$$

$$= \left|\left(2n\pi + \frac{1}{n}\right)\left[\underbrace{\sin(2n\pi)}_{0}\cos\left(\frac{1}{n}\right) + \underbrace{\cos(2n\pi)}_{1}\sin\frac{1}{n}\right]\right|$$

$$= \left|\left(2n\pi + \frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \left|\frac{2n^2\pi + 1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right|$$

② لكل $\varepsilon > 0$ نبحث عن $\delta > 0$ بحيث

$x, t \in \mathbb{R}$ $\quad |x - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+t^2}\right| = \left|\frac{\cancel{1} + t^2 - \cancel{1} - x^2}{(1+x^2)(1+t^2)}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{|t-x||t+x|}{(1+x^2)(1+t^2)} \le |t - x| \cdot 2 < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow |t - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

نأخذ $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

إثبات : $\frac{|t+x|}{(1+x^2)(1+t^2)} \le 2 \quad \frac{|t|}{1+t^2} \quad \frac{|x|}{1+x^2}$

$0 \le (|x| - 1)^2 = x^2 - 2|x| + 1 \le x^2 - |x| + 1$

$\Rightarrow |x| \le x^2 + 1$

④ لتكن $|f(x)| \le M_1$ لكل $x \in D$ ، $|g(x)| \le M_2$ لكل $x \in D$
خذ $M = \max\{M_1, M_2\}$

$x, t \in D, \ |x - t| < \delta \quad |f(x)g(x) - f(t)g(t)|$

$\delta = \min\{$

$$\le |f(x)g(x) - f(x)g(t) + f(x)g(t) - f(t)g(t)|$$
$$\le |f(x)g(x) - f(x)g(t)| + |f(x)g(t) - f(t)g(t)|$$
$$= |f(x)||g(x) - g(t)| + |g(t)||f(x) - f(t)|$$
$$\le M|g(x) - g(t)| + M|f(x) - f(t)|$$
$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \cancel{2} \cdot M \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

③

(1) f متصلة على $[-1, L+1]$ $\Longleftarrow$ f متصلة بانتظام على $[-1, L+1]$
(2) $\Longleftarrow$ f متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$

(أي إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة، مغلقة في المجال D).

البرهان

1. لتكن f متصلة وافرض أن F مغلقة. إذن $G=F^c$ مفتوحة، وعليه توجد H مفتوحة بحيث $f^{-1}(G)=H\cap D$. الآن

$$\begin{aligned} f^{-1}(F)=f^{-1}\left(G^c\right) &= \left[f^{-1}(G)\right]^c \cap D \\ &= \left(H^c \cup D^c\right)\cap D \\ &= H^c \cap D. \end{aligned}$$

إذا وضعنا $K=H^c$ فإن K مغلقة ويكون لدينا

$$f^{-1}(F)=K\cap D.$$

سنترك إثبات الاقتضاء في الاتجاه الآخر كتمرين. □

تمارين 5.5

1. عرف غطاءً مفتوحاً للفترة $(-1,1]$ لا يشمل غطاء جزئياً منتهياً.
2. لتكن K مجموعة متراصة و $F\subset K$
   (i) إذا كانت F مغلقة فأثبت أن F متراصة.
   (ii) إذا كانت F مغلقة في K فأثبت أن F متراصة.
3. إذا كانت كل من K_1 ، K_2 مجموعة متراصة فأثبت أن كلاً من $K_1\cup K_2$ ، $K_1\cap K_2$ متراصة.
4. إذا كانت K_n مجموعة متراصة لكل $n\in\mathbb{N}$ فأثبت أن $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ مجموعة

متراصة ولكن $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ ليست بالضرورة متراصة.

5. إذا كانت K متراصة فأثبت أن كلاً من $\sup K$ و $\inf K$ موجود وينتمي إلى K.

6. لأي $D \subset \mathbb{R}$ و $c \in \mathbb{R}$ تعرَّف المسافة بين المجموعة D و c بأنها
$$d(c,D) = \inf\{|x-c| : x \in D\}.$$
إذا كانت D متراصة فأثبت وجود نقطة $a \in D$ أقرب ما تكون للنقطة c.

7. افرض أن D متراصة و $f : D \to \mathbb{R}$ متصلة. أثبت أن المجموعة $\{x : 0 \le f(x) \le 1\}$ متراصة.

8. عرف الدالة $f : D \to \mathbb{R}$ على المجموعة $D = [0,1] \cup [2,3)$ بحيث
$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 4-x & x \in [2,3). \end{cases}$$
(i) أثبت أن f متباينة ومتصلة.

(ii) استنتج أن $f^{-1} : [0,2] \to D$ غير متصلة عند العدد 1 وذلك بإثبات أن المتتالية $\left(f^{-1}\left(1+(-1)^n/n\right)\right)$ غيرمتقاربة.

(iii) ماذا تعني هذه النتيجة بالنسبة للنظريتين 5.8 و 5.16؟

9. عرف دالة غير متصلة تكون دالتها العكسية متصلة.

10. استخدم تعريف التراص ونظرية 5.17 لإثبات نظرية 5.15.

لا يكتب في هذا الهامش

تمارين 5.3 :

① $G_n = (-1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ⟸ $(-1,1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ (اثبتها)

ولكن $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ لا يحوي غطاء جزئي منتهي

لان اي عدد من منتهي منها يكون على الشكل

$\{(-1+\frac{1}{n_1}, 1+\frac{1}{n_1}), \ldots, (-1+\frac{1}{n_k}, 1+\frac{1}{n_k})\}$

حيث $n_i \in \mathbb{N}$ ، $n_i \geq 1$

③ (أ) K متراصة ⟸ K مغلقة محدودة (هاينه بوريل) ⟸ F محدودة

⟸ F متراصة (هاينه بوريل)

(ب) F مغلقة في K ⟸ يوجد H مغلقة في $\mathbb{R}$ بحيث $F = H \cap K$

بما ان K مغلقة في $\mathbb{R}$ ⟸ F مغلقة في $\mathbb{R}$

⟸ استخدم فقرة (أ)

④ $K_n = [\frac{1}{n}, 1]$ متراصة لانها مغلقة و محدودة

⟸ $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = (0,1]$ غير متراصة لانها غير مغلقة

⑥ الدالة $f(x) = |x-c|$ متصلة

⑦ $\{x : 0 \leq f(x) \leq 1\}$ مغلقة لانها صورة عكسية $f^{-1}[0,1]$ مغلقة (استخدم 5.6.2)

⟸ ~~F~~ محدودة ، تطبيق هاينه بوريل

⑨ انظر تمرين ⑧

⑩ ليكن $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ غطاء مفتوحاً للمجموعة $f(D)$

⟸ $\{f^{-1}(G_\alpha) : \alpha \in I\}$ غطاء مفتوح للمجموعة D (نظرية 5-7)

وبما ان D متراصة يوجد $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ بحيث

$$D \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_{\alpha_i})$$

$$\Rightarrow f(D) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$$

لا يكتب في
هذا الهامش

تابع ٣

ك) D متراصة ⟸ D مغلقة

من تعريف inf : لكل $n\in\mathbb{N}$ يوجد $x_n\in D$ بحيث :

$$|x_n-c| < \inf\{|x-c| : x\in D\}+\frac{1}{n} = d(c,D)+\frac{1}{n} \quad \text{------} (*)$$

D محدودة ⟸ (x_n) محدودة ⟸ يوجد متتالية جزئية (x_{n_k}) منها

$x_{n_k}\to l$ و $l\in D$ لأن D مغلقة

لكل ε يوجد $N\in\mathbb{N}$ بحيث :

$$k\ge N \Rightarrow |l-c| = |l-x_{n_k}+x_{n_k}-c|$$
$$\le |l-x_{n_k}|+|x_{n_k}-c|$$
$$< \varepsilon + d(c,D)+\frac{1}{n_k}$$

ومن تعريف d :

$$d(c,D) \le |l-c| < \varepsilon + d(c,D)+\frac{1}{n_k}$$

$$\Rightarrow 0 \le \underbrace{|l-c|}_{} < \varepsilon+\frac{1}{n_k}$$

أقرب ما يكون من c

$\Rightarrow a = l$ ، ضع

لا يكتب في هذا الهامش

$x \in \left(-1+\frac{1}{m}, 1+\frac{1}{m}\right)$ $m \ge n$ $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$

$< x < 1+\frac{1}{m} < 1+\frac{1}{n}$ G_2

$(-1+1, 1+1) = (0, 2)$

$\left(-1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ G_1

$\left(-1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$\left(-1+\frac{1}{4}\right)$ $1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$K_1 = k \le \sup +1$

$K_2 \; k \le \sup + \frac{1}{2}$

$K_1 \supset K_2 \supset \cdots$

(5) K متراصة $\Leftarrow$ K محدودة من اسفل $\Leftarrow$ $\inf K$ موجود

عرف $K_n = \{k \in K : k \le \inf K + \frac{1}{n}\}$ متراصة

$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \xrightarrow{\text{متداخلة}}$ متراصة

(برهان آخر انظر نظرية ٣ صفحة 3,6)

برهان sup: بما أن K متراصة $\Leftarrow$ K محدودة من أعلى وفرضاً لتكن

$\Leftarrow$ يوجد متتالية (x_n) متزايدة في K $\longleftarrow \sup K$ (نظرية 3-3)

ولكن K مغلقة فهي تحوي نهايات متتالياتها المتقاربة

$\Leftarrow \sup K \in K$

$n \in \mathbb{N}$، $m \in \mathbb{Z}$، فإن هذا يعني أن مشتقة الدالة

$$\phi(x) = x^q, \quad q \in \mathbb{Q},\ x \in D\backslash\{0\}$$

هي .

$$\phi'(x) = qx^{q-1}, \quad x \in D\backslash\{0\}.$$

هذه النتيجة تبقى صحيحة حتى لو كانت $q \in \mathbb{Q}^c$، ويمكن إثبات ذلك باستخدام خواص الدوال الأسية واللوغاريتمية.

تمارين 6.1

1. أوجد مشتقات الدوال التالية حيثما كانت موجودة

(i) $f(x) = \tan x, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$

(ii) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$

(iii) $h(x) = [x], \quad x \in \mathbb{R}$

2. افرض أن

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

أثبت أن f قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ ثم احسب $f'(0)$.

3. إذا كانت الدالة f تحقق المتباينة $|f(x)| \leq |x|^\alpha$ في جوار النقطة 0 وكان $\alpha > 1$، فأثبت أن f قابلة للاشتقاق عند $x = 0$. راجع المثالين 6.2 و 6.7 على ضوء هذه النتيجة.

4. لتكن f قابلة للاشتقاق عند c. أثبت أن

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \qquad \text{(i)}$$

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h} \qquad \text{(ii)}$$

كـــذلك أثـــبت أن وجود النهاية في (i) يقتضي وجود $f'(c)$، ولكن وجود النهاية في (ii) لا يقتضي وجود $f'(c)$.

5. افرض أن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. تسمى الدالة f **زوجية** (even) إذا كان

$$f(-x)=f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

وفردية (odd) إذا كان

$$f(-x)=-f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

إذا كانـــت f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فأثبت أن f' فردية عندما تكون f زوجية، وأن f' زوجية عندما تكون f فردية.

6. لـــتكن $n\in\mathbb{N}$. نعرف $f^{(n)}$، مشتقة f من الرتبة n، استقرائياً على النحو التالي

$$f^{(1)}=f'$$

$$f^{(2)}=f''=(f')'$$

$$f^{(n)}=\left[f^{(n-1)}\right]'.$$

أوجد $f^{(n)}(x)$ لكل من الدوال التالية المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث $n\in\mathbb{N}$

(i) $f(x)=\sin x$

(ii) $f(x)=\cos x$

(iii) $f(x)=x^m$ حيث $m\in\mathbb{N}$ و $0\le m<n$

(iv) $f(x)=x^n$

(v) $f(x)=x^m$ حيث $m\in\mathbb{N}$ و $m>n$

7. افرض أن

$$f(x)=\begin{cases} x^n & x\ge 0,\ n\in\mathbb{N} \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

(i) أثبت أن f قابلة للاشتقاق $(n-1)$ مرة عند $x=0$ واحسب $f^{(n-1)}(0)$، حيث نعرف $f^{(0)}$ بأنها f.

(ii) أثبت أن $f^{(n)}(0)$ غير موجودة.

8. أوجد مشتقات الدوال التالية حيثما كانت موجودة

(i) $f(x)=\sqrt{|x|},\quad x\in\mathbb{R}$

(ii) $g(x)=x|x|,\quad x\in\mathbb{R}$

(iii) $h(x)=\left|x^2-1\right|,\quad x\in\mathbb{R}$

9. باعتبار Arccos هي الدالة العكسية للدالة

$$f(x)=\cos x,\quad x\in[0,\pi]$$

احسب مشتقة Arccos حيثما وجدت في الفترة $[-1,1]$.

10. أثبت أن الدالة القابلة للاشتقاق عند نقطة c تحقق شرط ليبشتز في جوار ما للنقطة c.

11. استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات **قاعدة لايبنتز** (Leibnitz' rule) للمشتقة من الرتبة n لحاصل ضرب دالتين:

$$(fg)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}(x).$$

أوجد المشتقة السادسة للدالة

$$\phi(x)=x^8\sin x$$

12. افرض أن n عدد طبيعي فردي وأن

$$f(x)=\left|x^n\right|,\quad x\in\mathbb{R}.$$

احسب $f^{(m)}(x)$ لأي $m<n$ وبين أن $f^{(n)}(0)$ غير موجودة.

ماذا يمكن أن نقول عن الحالة التي تكون فيها n زوجية؟

6.2 نظرية القيمة المتوسطة

تعرَّف القارئ في الفصل السابق على مفهوم القيم القصوى للدالة على مجال معـــروف ســـلفاً. تسمى مثل تلك القيم قيماً قصوى مطلقة، وذلك لتمييزها عن نوع آخر من القيم القصوى نبدأ هذا البند بتعريفه.

تعريف 6.2

لتكن $f:D\to\mathbb{R}$ نقول إن للدالة f **قيمة عظمى محلية** (local maximum) عند $c\in D$ إذا وجد جوار $U=(c-\delta,c+\delta)$ للنقطة c بحيث

$$f(x)\le f(c)\quad \forall\, x\in U\cap D.$$

كمـــا نقـــول إن لها **قيمة صغرى محلية** (local minimum) عند $c\in D$ إذا وجد جوار $U=(c-\delta,c+\delta)$ للنقطة c بحيث

$$f(x)\ge f(c)\quad \forall\, x\in U\cap D.$$

بالـــرجوع إلى التعريف 5.3 نستنتج أن القيمة العظمى(الصغرى) المطلقة للدالة هي قيمة عظمى (صغرى) محلية، ولكن العكس غير صحيح كما هو واضح من الشكل 6.4.

لا يكتب في
هذا الهامش

تمارين 6.1

11) نثبت صحة العبارة عندما n=1

$$(fg)' = fg' + f'g$$

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} f^{(1-k)} g^{(k)} = \binom{1}{0} f^{(1)} g^{(0)} + \binom{1}{1} f^{(0)} g^{(1)}$$

$$= (1) f' g + 1 \cdot f g'$$

نفرض صحة العبارة لأجل n ونثبت صحتها لأجل n+1

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

$$(fg)^{n+1} = [(fg)^n]' = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}\right]'$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left[f^{(n+1-k)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)}$$

$k+1 = k' \Rightarrow k = k'-1$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \sum_{k'=1}^{\infty} \binom{n}{k'-1} f^{(n-k'+1)} g^{(k')}$$

$$\binom{n}{0} f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{\infty} f^{(n+1-k)} g^{(k)} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]$$

$$= f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}$$

$$= \binom{n+1}{0} f^{(n+1-0)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}$$

⇐ العبارة صحيحة من أجل n+1

I) (i) $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

كذلك إذا افترضنا أن g متناقصة فعلاً فإن

$$\frac{g(x)-g(b)}{x-b}<0 \quad \forall x\in(a,b)$$

مما يعني أن $g'(b)\leq 0$، الأمر الذي يناقض كون

$$g'(b)=f'(b)-\lambda>0.$$

إذن لا بد من وجود $c\in(a,b)$ بحيث $g'(c)=0$. $\square$

نستنتج من نظرية داربو أن ليس كل دالة صالحة لأن تكون مشتقة لدالة أخرى. فالدالة

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

على سبيل المثال ليست مشتقة لأي دالة على أي جوار للصفر، وذلك لعجزها عن تحقيق الخاصة البينية على ذلك الجوار.

تمارين 6.2

1. عرف دالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بحيث تكون متصلة على $[0,1]$، وقابلة للاشتقاق على $(0,1)$، وتحقق $f(0)=f(1)=0$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0 وعند 1. أوجد النقطة $c\in(0,1)$ التي تحقق $f'(c)=0$.
2. أعط مثالاً يوضح أن عدم وجود $f'(x)$ عند نقطة ما x في (a,b) يخل بنظرية القيمة المتوسطة.
3. قرر فيما يلي ما إذا كانت الدالة f تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة، وعين c في تلك الحالة. إذا كانت f لا تحقق النظرية فاذكر

سبباً لذلك

(i) $f(x)=x^3$ على $[-1,1]$

(ii) $f(x)=|x|$ على $[-1,1]$

(iii) $f(x)=|x|\cdot x$ على $[-1,1]$

(iv) $f(x)=|x|^3$ على $[-1,2]$

(v) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ على $[-1,2]$

(vi) $f(x)=\begin{cases}1/x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ على $[0,1]$

(vii) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leq 1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$ على $[-1,2]$

4. أثبت أن $|\cos x-\cos y|\leq|x-y|$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$.

5. إذا كانت $f''(x)=0$ لكل $x\in(a,b)$ فأثبت أن f دالة خطية على (a,b)، أي أن هناك ثابتين c_1,c_2 بحيث

$$f(x)=c_1x+c_2\quad \forall\, x\in(a,b)$$

ماذا يمكن أن تقول عن f لو كانت $f'''(x)=0$ لكل $x\in(a,b)$؟

6. بين أن الدالة

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

تحقق $f'(0)>0$، ولكنها غير متزايدة على أي جوار للنقطة $x=0$. (قارن هذه النتيجة بنظرية 6.9).

7. أثبت ما يلي:

(i) $x<\tan x\quad \forall\, x\in(0,\pi/2)$

(ii) إذا كانت $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ فإن f متزايدة على $(0,\pi/2)$

(iii) $x\leq(\pi/2)\sin x \quad \forall\, x\in[0,\pi/2]$

(iv) $\sqrt{1+x}\leq 1+\dfrac{1}{2}x \quad \forall\, x>0$

8. إذا كانت كل من f ، g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وكانت

$$f'(x)<g'(x) \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

فأثبت أن لكل $a\in\mathbb{R}$ لدينا

$$f(x)-f(a)\leq g(x)-g(a) \quad \forall\, x\in[a,\infty).$$

9. افرض أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن $1\leq f'(x)\leq 2$ لكل $x\in\mathbb{R}$. إذا كانت $f(0)=0$ فأثبت أن $|x|\leq|f(x)|\leq 2|x|$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

10. افرض أن $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق وأن f' محدودة على (a,b) .

(i) أثـــبت أن f تحقق شرط ليبشتز على (a,b)، أي أنه يوجد $K\in\mathbb{R}$ بحيث

$$|f(x)-f(y)|\leq K|x-y| \quad \forall\, x,y\in(a,b).$$

استنتج أن f متصلة بانتظام.

(ii) أعط مثالاً لدالة $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق ومتصلة بانتظام ولكنها لا تحقق شرط ليبشتز.

(iii) هـــل الدالـــة المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ بالشكل $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ بحيث $f(0)=0$ منتظمة الاتصال على $\mathbb{R}$؟

11. لــتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ متصلة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على (a,b). إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}f'(x)$ موجودة وتساوي ℓ فأثبت أن f قابلة للاشتقاق عند a

وأن $f'(a)=\ell$.

12. أوجـــد القيم القصوى المحلية لكل من الدوال التالية وحدد الفترات التي تكون عليها الدالة متزايدة وتلك التي تكون عليها متناقصة:

(i) $f(x)=3x-4x^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

(ii) $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

(iii) $h(x)=x+\dfrac{1}{x} \quad \forall x\neq 0$

13. حـــدد الـــنقاط الـــتي تأخذ عندها الدوال التالية قيمها القصوى على الفترات المعطاة:

(i) $f(x)=\left|x^2-4\right|$ على $[-3,4]$

(ii) $g(x)=1+x^{2/3}$ على $[-2,1]$

(iii) $h(x)=x\left|x^2-1\right|$ على $[-2,2]$

14. افـــرض أن f متصلة على $[0,\infty)$ وقابلة للاشتقاق على $(0,\infty)$. إذا كانت f' متـــزايدة علـــى $(0,\infty)$ و $f(0)=0$ فأثبت أن الدالة $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ متـــزايدة على $(0,\infty)$. [إرشاد: احسب $g'(x)$ وطبق نظرية القيمة المتوسطة على f في فترة مناسبة].

15. علـــــى افتـــــراض أن $0<a<b$ وأن $n\in\{2,3,4,\cdots\}$، أثـــــبت أن $b^{1/n}-a^{1/n}<(b-a)^{1/n}$. [إرشاد: بيِّن أن الدالة $f(x)=x^{1/n}-(x-1)^{1/n}$ متناقصة على $[1,\infty)$ واحسب $f(1)$، $f(b/a)$].

16. افرض أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن $f(0)=0$، $f(1)=f(2)=-1$. أثبت وجود c_1، c_2، c_3 في $(0,2)$ بحيث

(i) $f'(c_1) = -1/2$

(ii) $f'(c_2) = -3/4$

(iii) $f'(c_3) = -1/11$.

17. افرض أن c نقطة حرجة للدالة f وأن f' قابلة للاشتقاق في جوار c. أثبت ما يلي:

(i) إذا كانت $f''(c) > 0$ فإن $f(c)$ قيمة صغرى محلية.

(ii) إذا كانت $f''(c) < 0$ فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية.

هذه النتيجة تعرف باسم **اختبار المشتقة الثانية لتصنيف النقاط الحرجة**.

(iii) أعط أمثلة تبين أنه إذا كانت $f''(c) = 0$ فإن $f(c)$ قد تكون قيمة صغرى محلية، أو قيمة عظمى محلية، أو ليست أياً منهما.

6.3 قاعدة لوبيتال

عندما يكون لكل من الدالتين f و g نهاية عند النقطة c

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell, \quad \lim_{x\to c} g(x) = m$$

فقد وجدنا أن

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m} \tag{6.7}$$

بشرط أن $m \neq 0$. أما إذا كان $m = 0$ فهناك احتمالان:

(i) إما أن $\ell \neq 0$ فلا يكون للنهاية (6.7) وجود في $\mathbb{R}$.

(ii) أو أن $\ell = 0$ وعندئذ قد تكون النهاية $\lim_{x\to c} f(x)/g(x)$ موجودة، مثل

16 + 47 (٤-٦ تمرين ٢)

(٥) $f'(x)=0 \Leftarrow$ يوجد $c_1 \in \mathbb{R}$ بحيث $f'(x) = c_1 \quad \forall x \in (a,b)$

ضع الدالة $g(x) = f(x) - c_1 x$

$\Leftarrow \quad g'(x) = f'(x) - c_1 = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$\Leftarrow$ يوجد $c_2 \in \mathbb{R}$ بحيث

$$g(x) = c_2$$

$$\Rightarrow f(x) - c_1 x = c_2$$

$$f(x) = c_1 x + c_2$$

(٦)

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) + \frac{1}{2}h - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[h \sin\left(\frac{1}{h}\right) + \frac{1}{2}\right] = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

لكن لكل جوار V للصفر، وكذلك $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

نستطيع اختيار $s, t \in V$ بحيث $g(t) = -1 \quad g(s) = 1$

$\Leftarrow \quad f'(s) = \frac{3}{2} > 0 \quad f'(t) = -\frac{1}{2} < 0$

$\Leftarrow$ f غير متزايدة على V (مبرهنة 6.9)

١١ لتكن $x \in [a,b]$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة على $[a,x]$

$\Leftarrow$ يوجد $c \in (a,x)$ بحيث

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

عندما $x \to a \Leftarrow c \to a$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

(١٤)

$$g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$$

لا يكتب في
هذا الهامش

بما أن f' متزايدة $\Leftarrow$ $x f'(c) \le x f'(x)$

$\Rightarrow f(x) \le x f'(x)$

$\Rightarrow g'(x) \geq 0$

$\Leftarrow$ g متزايدة

(1) (أ) نطبق نظرية القيمة المتوسطة على $[0,2]$

(ii) نطبق رول على $[1,2]$ لنحصل على نقطة $d \in (0,2)$ بحيث $f'(d) = 0$ ... نطبق نظرية داربو على الفترة (c, d)

(iii) نطبق نظرية داربو على (c, d)

$\frac{-1}{1}$ $\frac{-1}{2}$

$\frac{-1}{2}$ $f(m) = \frac{-1}{1}$

$< \frac{-3}{4} < 0$

وعليه توجد $\delta > 0$ بحيث

$$\frac{f(x)-f(c)}{(x-c)^m} > 0 \quad x \in (c-\delta, c+\delta)\backslash\{c\} \tag{6.15}$$

فنستنتج من ذلك أن

$$f(x)-f(c) > 0 \quad \forall x \in (c, c+\delta) \tag{6.16}$$

$$f(x)-f(c) < 0 \quad \forall x \in (c-\delta, c) \tag{6.17}$$

من (6.16) يتضح أن $f(c)$ ليست قيمة عظمى محلية، ومن (6.17) يتضح أنها ليست قيمة صغرى محلية.

(ii) ليكن m عدداً زوجياً ولنفرض أن $f^{(m)}(c) > 0$. عندئذ نستنتج من (6.15) أن

$$f(x)-f(c) \geq 0 \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta)$$

وتكون $f(c)$ قيمة صغرى محلية. أما إذا كانت $f^{(m)}(c) < 0$ فإن $-f(c)$ تكون قيمة صغرى محلية للدالة $-f$، مما يعني أن $f(c)$ قيمة عظمى محلية للدالة f. □

6.4 تمارين

1. استخدم نظرية تيلور بالرتبة $n = 2$ للحصول على تقريب مناسب لكل من
   (i) $\sqrt[3]{1.2}$.
   (ii) $\sqrt{0.9}$.
2. أثبت أن باقي تيلور للدالة $f(x) = \sin x$ في الصيغة (6.11) يقترب من 0 عندما $n \to \infty$ لأي x_0 و x في $\mathbb{R}$.

3. أثبت أن

$$\left|\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right|<\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ثم استخدم هذه المتباينة لتقريب $\log 1.3$ بحيث لا يتعدى الخطأ 0.001

4. قـــرب الدالة $\cos x$ على الفترة $[-1,1]$ بكثيرة حدود من الدرجة السادسة. قدِّر حدود الخطأ في هذا التقريب.

5. اســـتخدم النتيجة 6.18 لتحديد ما إذا كانت $f(0)$ قيمة قصوى للدالة f في كل من الحالات التالية:

(i) $f(x)=\cos x-1$

(ii) $f(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3$

(iii) $f(x)=x\sin x$

6. لتكن

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

أثـــبت أن f قابلة للاشتقاق أي عدد من المرات على $\mathbb{R}$ وأن $f^{(k)}(0)=0$ لكل $k\in\mathbb{N}$. استنتج أن $R_n(x)\not\to 0$ لأي $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

ب في
هامش

تمارين (٦-٤)

٣) خذ $f(x)=\log(1+x)$

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k} \quad \forall\, k\geq 1$$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \forall\, k\geq 1$$

إذن مبرهنة تايلور:

$$f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}(1+c)^{-(n+1)}\cdot x^{n+1}$$ حيث (c بين 0 و x)

$$\boxed{|R_n(0.3)|\leq\frac{(0.3)^{n+1}}{n+1}}$$

الآن خذ $x=0.3$ $\Leftarrow$

وبما أن $\frac{(0.3)^{4+1}}{4+1}=0.000486<0.001$ و $\frac{(0.3)^{3+1}}{3+1}=0.002025$

إذن خذ $n=4$ فيكون:

$$\log(1.3)=f(0.3)=0.3-\frac{(0.3)^2}{2}+\frac{(0.3)^3}{3}-\frac{(0.3)^4}{4}$$

$$=0.262$$

٦) أثبت أن $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot x^{-m}=0$ لكل $m\in\mathbb{N}$

$1+x=1.3$

$\boxed{x=0.3}$