جامعة الملك سعود	الامتحان الفصلي الأول	الزمن: ساعة ونصف
كلية العلوم	٣٨٤ ريض	الفصل الثاني ١٤٢٩/١٤٢٨

السؤال الأول : أ) أذكر نص نظرية داربو .

ب) إذا كانت $f \in R(a,b)$ وليكن $A = \int_a^b f(x)dx$. برهن أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون أي تجزئ P للفترة $[a,b]$ ويحقق $\|P\| < \delta$ فإن $|S(f, P, \alpha) - A| < \varepsilon$ مهما كانت العلامة $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1})$, حيث $\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

السؤال الثاني : أ) إذا كانت f و g دالتين محدودتين على الفترة $[a,b]$, برهن ان

$$L(f) + L(g) \le L(f+g)$$

ب) إذا كانت $f(x) = x^2$, حيث $a \le x \le b$, برهن أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد تجزئ P_ε للفترة $[a,b]$ بحيث يكون $U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$.

السؤال الثالث : أ) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[0,1]$ وكانت $g_n(x) = f(x^n)$ برهن أن : $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x) = f(0)$.

ب) إذا كانت (x_n) متتالية عددية وكانت $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ حيث $x \in [-\infty, +\infty]$ برهن أن $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = x$.

ج) ادرس التقارب المنتظم للمتتاليتين التاليتين : $(f_n(x)) = (e^{-nx})$; $(g_n(x)) = (xe^{-nx})$ على الفترة $[0, \infty)$.