بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الرياضيات — الاختبار الفصلي الأول — الفصل الثاني: ١٤٢٩-١٤٣٠

كلية العلوم — (٣٨٤ ريض) — الزمن: ساعة ونصف

السؤال الأول:

(i) أثبت شرط ريمان لقابلية الدالة المحدودة f للتكامل الريماني على $[a,b]$.

(ii) لتكن $f \in R(a,b)$ و $c>0$. إذا كان

$$g(x)=f(cx),\ \forall x \in \left[\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right]،$$

فأثبت أن $g \in R(a,b)$ وأن $\int_a^b f = c\int_{a/c}^{b/c} g$.

السؤال الثاني:

(i) لتكن $f \in R(a,b)$ متصلة عند $c \in [a,b]$. إذا كان: $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ لكل $x \in [a,b]$، فأثبت أن F قابلة للاشتقاق عند c و أن $F'(c)=f(c)$.

(ii) لتكن f و g متصلتين على $[a,b]$ و $g(a)\neq 0$. إذاكان $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ و $G(x)=\int_a^x g(t)\,dt$، فأثبت أن $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{F(x)}{G(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$.

(iii) إذا كانت f متصلة على $[a,b]$، فأثبت أن $\int_a^x f(t)(\sin x-\sin t)\,dt=\int_a^x \cos t\left(\int_a^t f(u)\,du\right)$.

ارشاد: اشتق الجانبين.

السؤال الثالث:

ادرس التقارب المنتظم للمتتالية (f_n) على D حيث

(i) $f_n(x)=\begin{cases}1/x & x\in[1,n]\\ 0 & otherwise\end{cases}$ و $D=[1,\infty)$.

(ii) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ و $D=[0,1]$.

٢٨٤ ريض   الاجابة النموذجية لامتحان الفصل الاول - الفصل الثاني ١٤٢٩ - ١٤٣٠

السؤال الأول: (i) راجع الكتاب المقرر ص ١٠.

(ii) لتكن $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزيئاً للفترة $[a,b]$. عندئذ $Q=\{\frac{x_0}{c}, \frac{x_1}{c}, \dots, \frac{x_n}{c}\}$ تجزئ للفترة $[\frac{a}{c}, \frac{b}{c}]$ ولدينا

$$M_i^g = \sup\{g(x) : x\in[\tfrac{x_i}{c}, \tfrac{x_{i+1}}{c}]\} = \sup\{f(x) : x\in[x_i, x_{i+1}]\} = M_i^f$$

فيكون
$$U(g,Q) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i^g\left(\frac{x_{i+1}}{c}-\frac{x_i}{c}\right) = \frac{1}{c}\,U(f,P)$$

وبالمثل
$$L(g,Q) = \frac{1}{c}\,L(f,P)$$

اذا $\varepsilon>0$ أعطيت اختر P بحيث $U(f,P)-L(f,P)<c\varepsilon$. عندئذ $U(g,Q)-L(g,Q)<\varepsilon$

ومنه $g\in\mathcal{R}(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ حسب شرط ريمان

كذلك
$$U(g) = \frac{1}{C}U(f)$$

وعليه
$$\int_{a/c}^{b/c} g = \frac{1}{c}\int_{a/c}^{b/c} f$$ المعطاة

السؤال الثاني (i) راجع الكتاب المقرر ص ٣٩

(ii) كسر $\frac{F(x)}{G(x)}$ المأخوذ في الصيغة $\frac{0}{0}$ عندما $x\to a^+$ وعليه من قاعدة

$$\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

(iii)
$$lhs = \sin x\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\sin t\,dt$$

$$\frac{d}{dx}(lhs) = \sin x\, f(x) + \cos x\int_a^x f(t)\,dt - f(x)\sin x = \cos x\int_a^x f(t)\,dt$$

$$\frac{d}{dx}(rhs) = \cos x\int_a^x f(u)\,du$$

$\therefore$
$$lhs = rhs + C$$

لكن عندما $x=a$ ،
$$lhs = rhs = 0$$

اذن
$$lhs = rhs$$

الفصل الأول / العام الثاني

<u>السؤال الثالث</u> (i) خذ أن $x\in[1,\infty)$. حيث يوجد N بحيث $x\le N$ وعليه .

$f_n(x)=\frac{1}{x}$ لكل $n\ge N$ ، وإذن $f_n(x)\to f(x)=\frac{1}{x}$ نقطياً .

أيضاً

$$|f_n(x)-f(x)| = \begin{cases} \frac{1}{x} & x>n \\ 0 & x\le n \end{cases}$$

وعليه

$$\sup_{x\in[1,\infty)} |f_n(x)-f(x)| \le \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

وإذن $f_n \xrightarrow{u} f$.

(ii) إذا $x=0$ فإن $f_n(x)=0$ لكل n وعليه $f_n(x)\to 0$

وإذا $x>0$ فإن $|f_n(x)| \le \frac{1}{nx} \to 0$

وإذن $f_n \xrightarrow{P} 0$.

بسهولة نرى أن القيمة العظمى للدالة f_n هي $\frac{1}{2}$ (عندما $x=\frac{1}{n}$) وعليه

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-0| = \frac{1}{2} \not\to 0$$

$\therefore$ $f_n \overset{u}{\not\to} 0$.