قسم الرياضيات	**423 ريض**	**الفصل الثاني**
جامعة الملك سعود	**الاختبار النهائي**	**2011-2012**

1- افرض أن u دالة توافقية في المستوى القطبي (r,θ) وأنها لا تعتمد على θ، فهي إذن تحقق معادلة لابلاس العادية $\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=0$.

(أ) أوجد الحل العام لهذه المعادلة

(ب) استنتج الحل الذي يحقق الشرطين: $u(1)=0$، $u(2)=1$.

2- أوجد الحل

$$\begin{aligned}
&u_{tt}=u_{xx}-1, \quad 0<x<1, t>0,\\
&u(0,t)=u(1,t)=0, \quad t>0,\\
&u(x,0)=x^2/2,\, u_t(x,0)=0, \quad 0<x<1.
\end{aligned}$$

3- استنتج توزيع درجة الحرارة $u(x,t)$ على قضيب طوله 5 وحدات إذا علمت أن درجة الحرارة عند طرفيه $x=0$، $x=5$ هما 0، 2 على الترتيب، وأن التوزيع الابتدائي لدرجة الحرارة هو $u(x,0)=0$. افرض أن انتقال الحرارة محكوم بالمعادلة $u_t=u_{xx}$. احسب الشكل ألنهائي لتوزيع الحرارة $\lim_{t\to\infty}u(x,t)$

4- أثبت أنه لا يوجد للمسألة التالية أكثر من حل واحد في $C^2([0,l]\times[0,\infty))$:

$$\begin{aligned}
&u_t=ku_{xx}+f(x,t), \quad 0<x<l,\, t>0,\\
&u(0,t)=g_1(t),\, u(l,t)=g_2(t), \quad t>0,\\
&u(x,0)=h(x), \quad 0<x<l.
\end{aligned}$$

إرشاد: استخدم تكامل الطاقة

$$E(t)=\tfrac{1}{2k}\int_0^l v^2(x,t)\,dx$$

لإثبات أن الفرق بين أي حلين للمسألة يساوي الصفر على الشريحة $[0,l]\times[0,\infty)$.

5- استخدم تكامل فورييه لحل المسألة

$$\begin{aligned}
&u_t=u_{xx}, \quad x>0,\, t>0,\\
&u_x(0,t)=0, \quad t>0,\\
&u(x,0)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & x>1.\end{cases}
\end{aligned}$$

لا يكت

هذا الهـ

1- $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = 0$

نفرض أن

(أ) $u(r,\theta) = v(r)\, w(\theta)$

$u_{rr} = v''(r)\, w(\theta)$

$u_r = v'(r)\, w(\theta)$

$\Rightarrow u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = 0 \Rightarrow v''(r) w(\theta) + \frac{1}{r} v'(r) w(\theta) = 0$

ثم نقسم على $v\,w$

$\Rightarrow \frac{v''(r) \cancel{w(\theta)}}{v \cancel{w}} + \frac{1}{r} \frac{v'(r) \cancel{w(\theta)}}{v \cancel{w}} = 0$

$\Rightarrow \frac{v''}{v} + \frac{1}{r} \frac{v'(r)}{v} = 0$

نضرب في r $\Rightarrow v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) = 0$

$r v''(r) + v'(r) = 0$

$(r v')' = 0$

$(r v') = a$

$v' = \frac{a}{r}$

الحل العام لهذه المعادلة $\boxed{v(r) = a \log r + b}$

(ب) $u(r) = v(r)$

$\Rightarrow u(r) = a \log r + b$

الشرط الأول $\Rightarrow u(1) = a(\underbrace{\log 1}_{0}) + b = 0$

$\Rightarrow \boxed{b = 0}$

الشرط الثاني $\Rightarrow u(2) = a \log 2 = 1$

$\Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{\log 2}}$

الحل الذي يحقق الشرطين ∴ $u(r) = \frac{1}{\log 2} \log(r)$

لا يكتب في هذا الهامش

2 - أوجد الحل :

$$u_{tt} = u_{xx} - 1 , \quad 0 < x < 1 , \ t > 0$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 , \quad t > 0$$

$$u(x,0) = x^2/2 , \quad u_t(x,0) = 0 , \quad 0 < x < 1$$

الحل :

حيث v يكون الحل لدى : $u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$

$$u_{tt} = v_{tt}$$

$$u_{xx} - 1 = v_{xx} + \varphi''(x) - 1$$

$$\Rightarrow \cancel{v_{tt}} = \cancel{v_{xx}} + \varphi''(x) - 1$$

$$\rightarrow v_{tt} = v_{xx}$$ نفرض

$$\Rightarrow \varphi''(x) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \varphi''(x) = 1$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = x + a$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + ax + b}$$

$$u(0,t) = v(0,t) + \varphi(0)$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + b$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$u(1,t) = v(1,t) + \varphi(1)$$

$$0 = 0 + \frac{1}{2} + a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \boxed{\varphi(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x}$$

$$v(x,t) = u(x,t) - \varphi(x)$$

$$\Rightarrow v_t(x,t) = u_t(x,t)$$

$$\boxed{v(x,0)} = u(x,0) - \varphi(x)$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x = \boxed{\frac{1}{2}x}$$

$$\boxed{v_t(x,0) = 0}$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cos \lambda x + b_1 \sin \lambda x)(a_2 \cos \lambda t + b_2 \sin \lambda t)$$

An

لا يكت
هذا اله

Bn

$$\therefore V(x,t) = \sum_{1}^{\infty} (b_1 \sin n\pi x)(a_2 \cos n\pi t + b_2 \sin n\pi t)$$

$$\Rightarrow V(x,t) = \sum_{1}^{\infty} (B_n \sin n\pi x \cos n\pi t + A_n \sin n\pi x \sin n\pi t)$$

$$\Rightarrow V(x,0) = \sum_{1}^{\infty} B_n \sin n\pi x = \frac{1}{2} x$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{2}{1} \int_0^1 \frac{1}{2} x \sin n\pi x \, dx$$

$$u = x \,, \quad dv = \sin n\pi x$$

$$du = dx \,, \quad v = -\frac{1}{n} \cos n\pi x$$

$$\Rightarrow (x)(-\frac{1}{n} \cos n\pi x) \Big|_0^1 + \frac{1}{n} \int_0^1 \cancel{\cos n\pi x \, dx}$$

$$\Rightarrow (x)(\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_{x=1}^{0})$$

$$\Rightarrow (0 - \frac{1}{n} \cos n\pi)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n\pi} (-1)^n$$

$$\boxed{B_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}}$$

An

$$V_t(x,0) = \sum_{1}^{\infty} (b_1 \sin n\pi x)(n\pi (b_2 \cos n\pi t - a_2 \sin n\pi t))$$

$$\Rightarrow V_t(x,0) \Rightarrow \boxed{A_n = 0} \quad \forall n$$

$$\therefore V(x,t) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x \cos n\pi t$$

$$\therefore U(x,t) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x \cos n\pi t + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} x$$

3- الحل :-

$$u_t = u_{xx}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(5,t) = 2$$

$$u(x,0) = 0$$

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$$

$$u_t = v_t, \quad u_{xx} = v_{xx} + \varphi''(x)$$

$$\Rightarrow v_t = v_{xx} + \varphi''(x)$$

$$\Rightarrow \varphi''(x) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(x) = ax + b}$$

$$u(0,t) = v(0,t) + \varphi(0)$$

$$0 = 0 + b$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$u(5,t) = v(5,t) + \varphi(5)$$

$$2 = 0 + 5a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{5}}$$

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{2}{5}x}$$

$$v_t = v_{xx}$$

$$v(x,t) = u(x,t) - \varphi(x)$$

$$v(x,0) = u(x,0) - \varphi(x)$$

$$= 0 - \frac{2}{5}x = \frac{-2}{5}x$$

لا يكت

هذا الم

$$v(x,t) = \sum_1^\infty (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)\, e^{-\lambda^2 t}$$

$$v(0,t) = \sum_1^\infty A(\lambda) e^{-\lambda^2 t} = 0 \Rightarrow \boxed{A(\lambda) = 0}$$

$$v(5,t) = \sum_1^\infty B(\lambda)\sin 5\lambda\, e^{-\lambda^2 t} = 0$$

$$\Rightarrow \sin 5\lambda = 0 \Rightarrow 5\lambda = n\pi$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{5}$$

$$\Rightarrow v(x,t) = \sum_1^\infty B_n \sin\frac{n\pi}{5}x\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{25}t}$$

$$\Rightarrow v(x,0) = \sum_1^\infty B_n \sin\frac{n\pi}{5}x = -\frac{2}{5}x$$

$$B_n = \frac{2}{5}\int_0^5 -\frac{2}{5}x \sin\frac{n\pi}{5}x\, dx$$

$$= \frac{-4}{25}\int_0^5 x\sin\frac{n\pi}{5}x\, dx$$

$$u = x, \quad dv = \sin\frac{n\pi}{5}x$$

$$du = dx, \quad v = -\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{5}x$$

$$(x)\left(+\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{5}x\right)\Big|_5^0 - \underbrace{\int_0^5 -\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{5}x\, dx}_{=0}$$

$$\left(0 - \frac{25}{n\pi}\cos n\pi\right)$$

$$\therefore B_n = \frac{4}{n\pi}(-1)^n$$

$$\therefore v(x,t) = \sum_1^\infty \frac{4}{\pi n}(-1)^n \sin\frac{n\pi}{5}x\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{25}t}$$

$$\boxed{\therefore u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{5}x\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{25}t} + \frac{2}{5}x}$$

لا يكتب في
هذا الهامش

4- نفرض أنه يوجد حلين للمسألة، وليكن

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

نعلم أن $v_t = kv_{xx}$ من المسألة

أي أن v يحقق الحد المتجانس

$$v(0,t)=0 , \quad v(l,t)=0$$

$$\Rightarrow v(x,0)=0$$

الآن من تكامل دالة الطاقة (Energy Function)

$$E(t)=\frac{1}{2k}\int_0^l v^2(x,t)\,dx \geq 0$$

نشتق

$$E'(t) = \frac{1}{\cancel{2}k}\int_0^l \cancel{2} v v_t \,dx$$

$$= \frac{1}{\cancel{k}}\int_0^l v \cancel{k} v_{xx} \,dx$$

$$= \int_0^l v v_{xx} \,dx$$

$$u=v \qquad dv = v_{xx}\,dx$$

$$du = v_x\,dx \qquad v = v_x$$

$$\cancel{v v_x \Big|_{x=0}^{l}} - \int_0^l v_x^2 \,dx \leq 0$$

لأن v يحقق حل المتجانس

نستنتج أن E غير متزايدة

$E(t)=0 \Leftarrow E(0)=0$ الآن بما أن

$v(x,t)=0 \ \forall t \Leftarrow$ و $\forall\ 0<x<l$

$$\boxed{u_1(x,t)=u_2(x,t)} \Leftarrow$$

∴ للمسألة حل وحيد فقط

لا ي
هذا

$$u_t = u_{xx}\,,\quad x>0\,,\ t>0 \qquad \_5$$

$$u_x(0,t)=0\,,\quad t>0$$

$$u(x,0)=\begin{cases}1\,, & 0<x<1\\ 0\,, & x>1\end{cases}$$

الحل :-

$$u(x,t)=v(x)\,w(t)$$

$$v(x)=A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x$$

$$w(t)=e^{-\lambda^2 t}$$

$$\therefore\ u_\lambda(x,t,\lambda)=\left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right)e^{-\lambda^2 t}$$

$$u(x,t)=\int_0^\infty u_\lambda(x,t,\lambda)\,d\lambda$$

$$=\int_0^\infty \left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right)e^{-\lambda^2 t}\,d\lambda$$

$$u_x(x,t)=\int_0^\infty \lambda\left(B(\lambda)\cos\lambda x - A(\lambda)\sin\lambda x\right)e^{-\lambda^2 t}\,d\lambda$$

$$u_x(0,t)=\int_0^\infty \lambda B(\lambda)\,e^{-\lambda^2 t}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{B(\lambda)=0}$$

$$u(x,t)=\int_0^\infty A(\lambda)\cos\lambda x\,e^{-\lambda^2 t}\,d\lambda$$

$$u(x,0)=\int_0^\infty A(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda = f(x)$$

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx$$

$$A(\lambda)=2\int_0^\infty f(x)\cos\lambda x\,dx$$

$$=2\int_0^1 \cos\lambda x\,dx$$

$$=\frac{2}{\lambda}\left(\sin\lambda x\Big|_0^1\right)$$

∴ الحل العام

$$\boxed{u(x,t) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi\lambda} \sin\lambda \cos\lambda x \, e^{-\lambda^2 t} \, d\lambda}$$

9