كلية العلوم – قسم الرياضيات – الفصل الأول للعام الدراسي ١٤٢٨/١٤٢٩

الامتحان النهائي لمقرر ٤٣٤ ريض وزن الامتحان: ٥٠ درجة الزمن: ثلاث ساعات

س١ (أ) اختر الإجابة الصحيحة: عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X+Y+Z=30$ بحيث $X \geq Y \geq Z$ يساوي

$$\binom{30-1+3}{30} \qquad S(30,3) \qquad P_3(30) \qquad (30)_3$$

(ب) أثبت أن عدد التطبيقات الشاملة من المجموعة $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ إلى المجموعة $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ ، حيث $m \geq n$ ، يساوي $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$.

(ج) أثبت ان $\binom{m+n}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{k}\binom{n}{k-i}$.

(د) جد العلاقة الارتدادية لعدد المتتاليات الثنائية من الطول n والتي لا تحتوي على ثلاثة أصفار متتالية، اوجد الشروط الابتدائية.

(هـ) اوجد الدالة المولدة العادية لعدد طرق اختيار ثلاثة أعداد زوجية مختلفة من بين الأعداد $1,2,\ldots,n$.

(و) اوجد العدد في الفقرة (هـ) عندما $n=30$.

(ز) اوجد العدد في الفقرة (هـ) عندما $n=73$.

س٢ أثبت العبارة إذا كانت صحيحة أو أعط مثالاً مناقضا إذا كانت خاطئة.

(أ) إذا كان $r \geq 0$ عدد صحيحاً، فإن عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1+X_2+\cdots+X_n=r$ يساوي $\binom{n-1+r}{r}$.

(ب) إذا كان G رسما أويلري، فإن G رسم هاملتوني.

(ج) إذا كان G رسم متمم لنفسه عدد رؤوسه n ، فإن $n \equiv 1 \bmod 4$.

س٣ (أ) إذا كان $G=(X,Y,E)$ رسماً ثنائي التجزئة، فاثبت أن $|E|=\sum_{x\in X}\deg(x)=\sum_{y\in Y}\deg(y)$.

(ب) أثبت أن الرسم G يكون ثنائي التجزئة إذا وفقط إذا كان $\chi(G)=2$.

(ج) أثبت أن الرسم $G=(V,E)$ شجرة إذا وفقط إذا وجد بين أي رأسين ممر وحيد.

(د) إذا كان G رسماً مستوياً مترابطاً عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه e و طول أقصر دورة فيه هي k ، فأثبت أن $e \leq \frac{k}{k-2}(v-2)$.

(هـ) هل الرسم G في الشكل أدناه مستوي مع التعليل؟

(و) أثبت أن أي رسم مستوي يحتوي رأس درجته على الأكثر 5.

س٤ (أ) إذا كان الرسم $G=(V,E)$ هاملتونياً، فأثبت أن $w(G-S)\le |S|$ لكل مجموعة جزئية فعلية غير خالية من V، حيث $w(G)$ يرمز لعدد مركبات الرسم G.

(ب) أثبت أن الرسم K في الشكل أدناه ليس هاملتونياً. (إرشاد: يمكن ذلك باستخدم الفقرة (أ))

(ج) هل الرسم H في الشكل أدناه أويلري ولماذا؟

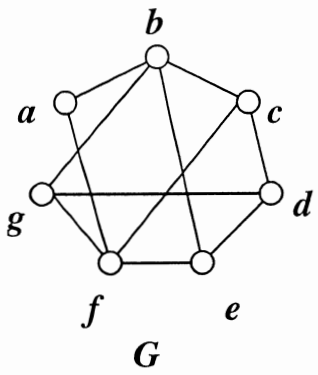
(د) أثبت أن الرسم $K_{m,n}$ هاملتوني إذا وفقط إذا كان $m=n\ge 2$.

(و) متى يكون الرسم $K_{m,n}$ اويلرياً؟

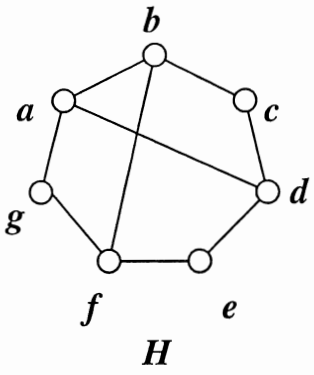
(ز) هل $H\cong K$ في الشكل أدناه؟ مع التعليل.

(ط) للرسم الموزون W في الشكل أدناه أوجد شجرة مولدة أصغرية، ثم أوجد وزنها.

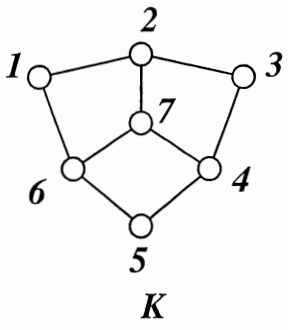
(ي) مستخدماً خوارزمية دايجسترا، جد للرسم الموزون W في الشكل أدناه شجرة مولدة تحوي أقصر المرات من x إلى باقي رؤوس الرسم.



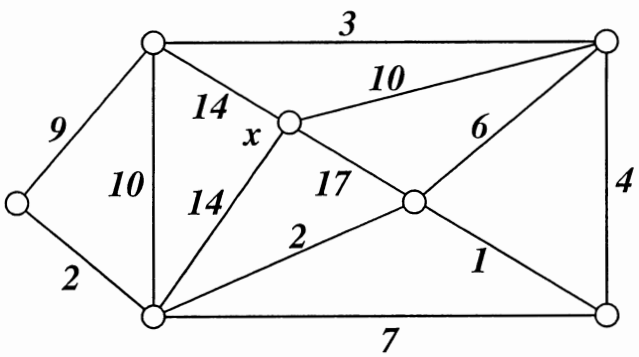
G



H



K



W