جامعة الملك سعود — الاختبار النهائي — الفصل الدراسي الأول
كلية العلوم — في المقرر — ١٤٣٠ / ١٤٣١ هـ
قسم الرياضيات — ٤٣٤ ريض — الزمن: ٣ ساعات

(أ) أجب عن ٦ أسئلة من الأسئلة التالية:

س١ أثبت أن $S(n+1,k) = S(n,k-1) + k\,S(n,k)$

س٢ أثبت أن عدد التطبيقات الشاملة من مجموعة عدد عناصرها m إلى مجموعة عدد عناصرها n حيث $m \geq n$ يساوي $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$

س٣ إذا كانت T شجرة عدد رؤوسها $n > 1$ فأثبت أنه يوجد على الأقل رأسان في T بحيث درجة كل منهما 1.

س٤ إذا كان G رسماً بسيطاً مترابطاً مستوياً فأثبت أنه يوجد في G رأس v بحيث $\deg(v) \leq 5$

س٥ إذا كان G رسماً عدد رؤوسه n فأثبت أن له "إغلاقاً وحيداً".

س٦ إذا كان G رسماً عدد رؤوسه n وكان $\deg x + \deg y \geq n-1$ لكل رأسين x, y غير متجاورين في G، فأثبت أن G نصف هاملتوني.

س٧ إذا كان G رسماً عدد رؤوسه n فأثبت أن $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$

$6 \times (3.5) = 21$

(ب) أجب عن جميع الأسئلة التالية:

س (13) (أ) إذا كان $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ تحليلاً للعدد n إلى عوامله الأولية فجد (1) (i) عدد قواسم n

(1) (ii) عدد قواسم n التي لا يقسمها أي مربع كامل مختلف عن 1

(2) (ب) أعط برهاناً تركيبياً للمطابقة $\binom{m+n}{2} = \binom{m}{2} + \binom{n}{2} + mn$

(3) (ج) استخدم مبدأ التضمين والإقصاء لحساب عدد الأعداد الأولية التي هي أقل من 120.

(3) (د) جد حل المسألة التالية: $a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 3^n$ ، $n \geq 2$
$a_0 = 0$ ، $a_1 = \frac{7}{2}$

(3) (هـ) استخدم الدوال المولدة لحل المسألة التالية:
$a_n = 2a_{n-1} + 3^{n-1}$
$a_0 = 0$

س٢ (6) (أ) (2) إذا كان G رسمًا عدد رؤوسه n وعدد أضلاعه $n-1$ فأثبت أنه يوجد في G رأس x بحيث $\deg x \leq 1$.

(ب) (2) جد جميع الأشجار التي هي رسوم منتظمة

(جـ) (2) جد جميع الأشجار T بحيث T^c شجرة أيضًا .

س٣ (7) (أ) (2) إذا كان G رسمًا عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه e وعدد مركباته k فأثبت أن $e \geq v-k$.

(ب) (2) إذا كان G رسمًا بسيطًا مترابطًا مستويًا عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه e وطول أقصر دورة فيه g فأثبت أن $e \leq \frac{g}{g-2}(v-2)$ ،

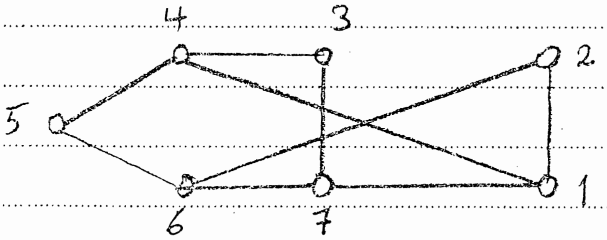
(جـ) جد جميع قيم m, n بحيث

(1) (i) لا يكون $K_{m,n}$ مستويًا

(1) (ii) لا يكون $K_{m,n}$ أويلريًا

(1) (iii) لا يكون $K_{m,n}$ هاملتونيًا .

س٤ (3) ليكن G هو الرسم التالي :



G

(1) (أ) هل G ثنائي التجزئة ؟ لماذا ؟

(1) (ب) هل G هاملتوني ؟ لماذا ؟

(1) (جـ) جد $\chi(G)$ من غير أن تلون G .

بسم الله الرحمن الرحيم

(٣٣)

سؤال: لتكن $N=\{1,2,\dots,n+1\}$ ولتكن $N=\{1,2,\dots,n\}$

يمكن ايجاد تجزئة المجموعة N بعددها k عناصر ... كالتالي

تجزئة المجموعة N عددها $k-1$ جزء ثم اضافة المجموعة $\{n+1\}$ للتجزئة

تجزئة المجموعة N عددها k ثم نضيف $n+1$ لأحد الأجزاء (وعددها k)

ثم أضفنا العنصر $n+1$ ... ومن مبدأ الضرب نجد

$kS(n,k)$

3½

الآن من مبدأ الجمع يكون تجزئة المجموعة N التي عددها k هي

$S(n+1,k)=S(n,k-1)+kS(n,k)$

$B=\{\dots\}$ $A=\{\dots\}$

سؤال: لتكن U التطبيقات من A الى B حيث $|A|=m$ و $|B|=n$

ولتكن $A_k=\{f\in U : b_k\notin R(f)\}$ لكل $1\le i\le n$

حيث $R(f)$ مدى f . المطلوب حساب

$|U-(A_1\cup A_2\cup A_3\dots A_n)|$ اي نحسب

$|U|-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\dots+(-1)^n\alpha_n$

الآن $|U|=n^m$

الآن نحسب α_1

$\alpha_1=|A_1|+|A_2|+\dots+|A_n|$

من تعريف A_k نجد ان $|A_k|$ هو عدد التطبيقات من A الى B/b_k وعددها $|A_k|=(n-1)^m$ لكل $1\le i\le n$

اي ان $\alpha_1=n(n-1)^m$

3

الآن نحسب α_2 حيث $\alpha_2=|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+\dots+|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_4|+\dots+|A_{n-1}\cap A_n|$

ان $|A_i\cap A_j|$ هو عدد التطبيقات من A الى $B/b_i,b_j$ وبالتالي $|A_i\cap A_j|=(n-2)^m$

وبالتالي فإن $\alpha_2=\binom{n}{2}(n-2)^m$

تابع ~~[illegible]~~ (أ)

س: الإجابة $|U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots + (-1)^n \alpha_n$

$$= n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \binom{n}{3}(n-3)^m + \cdots$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(1)^m + (-1)^n \binom{n}{n}\underbrace{(n-n)^m}_{=0}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

~~س٣ لنفرض أنه يوجد في T ممر [illegible] ولنفرض أنه $x_1 e_1 x_2 e_2 x_3 \ldots e_{n-1} x_n$ [illegible] $\deg x_1 \geq 1$ [illegible] T [illegible] $i \leq n$~~

س٤ إذا كان $V(G) < 3$ فإنه تتحقق المبرهنة إذا $V(G) \geq 3$

والآن لتكن $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ رؤوس G ولنفرض أنه

$\deg y \geq 6$ لكل $y \in V$ ~~$\deg x \geq 6$~~ ونجد

ومنه $2|E| = \deg x_1 + \deg x_2 + \cdots + \deg x_n \geq 6 + 6 + 6 + \cdots$

أي أن

$2|E| \geq 6n \Rightarrow |E| \geq 3n$

بما أن G بسيط ومترابط ومستوٍ و $V(G) \geq 3$

فإنه $e(G) \leq 3V(G) - 6$

وبالتالي $3n \leq 3n - 6$

أي أن $0 \leq -6$ تناقض

لا يكتـ
هذا الهـ

تابع (أ)

بفرض أن الأضلاع $e_1, e_2, \ldots, e_k$ هي الأضلاع التي أضيفت إلى G للحصول على G_k وبفرض أن $f_1, f_2, \ldots, f_m$ هي الأضلاع التي أضيفت إلى G للحصول على البيان G_m

لنثبت أن كل ضلع e_i ، $i = 1, 2, \ldots, k$ موجود في G_m وكل f_i
$i = 1, 2, \ldots, m$ موجود في G_k.

إن لم يكن صحيحاً ذلك الترتيب الحسي

لنفرض أن $\{e_1, \ldots, e_k\} \not\subseteq \{f_1, \ldots, f_m\}$

وليكن $e_r \notin \{f_1, \ldots, f_m\}$ ، $\{f_1, \ldots, f_m\} \supseteq \{e_1, \ldots, e_{r-1}\}$

حيث r أصغر دليل

وعليه $\{e_1, e_2, \ldots, e_{r-1}\} \subseteq \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$

لنكن $G + \{e_1, e_2, \ldots, e_{r-1}\} = H$

إن H بيان جزئي من G_k و G_m

لنفرض أن $e_r = \{x, y\}$

من تعريف G_k

$$\deg_H x + \deg_H y \geq n$$

وعليه

$$\deg_{G_m} x + \deg_{G_m} y \geq \deg_H x + \deg_H y \geq n$$

تناقض مع كون x, y غير متجاورين في G_m لأن $e_r \notin G_m$

إذا كل ضلع e_i موجود في G_m

وكذلك بنفس الطريقة بالنسبة f_i تكون موجودة في G_k

إذا $G_k = G_m$

لا يكتب في
هذا الهامش

~~نأخذ~~ ...

سؤال: اذا كان ... $G \cong K_1$ فإن ... يحتوي على ممر هاملتوني

لكن $V(K) = \{z\}$ حيث $H = G + K_1$

و $|V(H)| = n+1$

لكن $V(H) \ni x, y$ غير متجاورين

$$\deg_H x + \deg_H y = \deg_G x + 1 + \deg_G y + 1 \geq n+1$$

أي أن H هاملتوني وحيث H يحتوي على دورة هاملتونية

وبالتالي فإن $C - \{z\}$ هو ممر هاملتوني في G

أي أن G يحتوي على ممر هاملتوني

سؤال: باستخدام الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس

~~...~~ فإن $\chi(G) \leq \Delta + 1$

أي أن $\chi(G) \leq$ ... أي متحقق

الآن نفرض صحة النتيجة لعدد الرؤوس k حيث ...

لكن $G(V, E)$ بيان له عدد رؤوس $k+1$

~~...~~ ونأخذ $v \in V(G)$ وبالتالي فإن

$G - v$ له عدد رؤوس k ويحقق الفرضية أي

$$\chi(G - v) \leq \Delta(G - v) + 1$$

أي أنه يوجد تلوين من الدرجة $\Delta(G - v) + 1$ لـ $(G - v)$

لنفرض أن $\Delta(G) = \Delta(G - v)$ وبالتالي فإن $\deg(v) \leq \Delta(G)$

وبالتالي يوجد لون لم يستخدم من تلوين ... ويستخدم

لتلوين v ... تلوين من الدرجة $\Delta(G) + 1$ لـ G

اذا كان ~~...~~ $\Delta(G) > \Delta(G - v)$

... تلوين مختلف لتلوين ... نحصل على تلوين

من الدرجة $\Delta(G - v) + 2$ أي تلوين من النوع $\Delta(G) + 1$

لـ G

السؤال (ب) حلول

(جـ)

$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = r$

وبالتالي عدد طرق التوزيع n هو عدد حلول المعادلة وهي

$$\binom{k+r-1}{r}$$

$1 \le i \le k \qquad x_i = 1, 3, 5, \dots$

$$G(x) = (x + x^3 + x^5 + \dots)^k = x^k(1 + x^2 + x^4 + \dots)$$

$$G(x) = x^k \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$$

x^r والحل هو معامل

(ب) باستخدام متطابقة الجمع لباسكال

$$\binom{m+n}{2} = \binom{m+n-1}{2} + \binom{m+n-1}{1}$$

$$\binom{\dots n-1}{1} + \binom{m+n-1}{2} = \binom{m+n-2}{2} + \binom{m+n-2}{1} + m+n-1$$

$$= \binom{m+n-3}{2} + \binom{n+m-3}{1} + 2m+2n-3$$

$$= \binom{m}{2} + \binom{m}{1} + (n-1)m + \frac{2n-(n+1)(n)}{2}$$

لا يكتب في هذا الهامش

تابع (ب)

سؤال (جـ)

$U = \{1, \ldots, 120\}$

$\sqrt{120} = 10.95$

نفرض

$A_1 = \{x \in U : 2 \mid x\}$, $A_2 = \{x \in U : 3 \mid x\}$

$A_3 = \{x \in U : 5 \mid x\}$, $A_4 = \{x \in U : 7 \mid x\}$

$U = \{1, 2, \ldots, 120\}$ حيث

$|U - A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$ نحسب

أي نحسب

$|U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4$

$|U| = 120$ [illegible]

$\alpha_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|$

$|A_1| = \left\lfloor \frac{120}{2} \right\rfloor = 60$, $|A_2| = \left\lfloor \frac{120}{3} \right\rfloor = 40$, $|A_3| = \left\lfloor \frac{120}{5} \right\rfloor = 24$

$|A_4| = \left\lfloor \frac{120}{7} \right\rfloor = 17$, $\alpha_1 = 60 + 40 + 24 + 17 = 141$

$\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|$

$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{120}{6} \right\rfloor = 20$, $|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{120}{10} \right\rfloor = 12$

$|A_1 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{120}{14} \right\rfloor = 8$, $|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{120}{15} \right\rfloor = 8$

$|A_2 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{120}{21} \right\rfloor = 5$, $|A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{120}{35} \right\rfloor = 3$

$\alpha_2 = 56$

$\alpha_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4|$ [illegible]

$+ |A_2 \cap A_3 \cap A_4|$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{120}{30} \right\rfloor = 4$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{120}{42} \right\rfloor = 2$

$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{120}{70} \right\rfloor = 1$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{120}{105} \right\rfloor = 1$

لا يكتب
هذا الهامش

$120 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 120 - 141 + 55 - 5 = 27$

حيث أن ~~[illegible]~~ عدد الأعداد الأولية [illegible]

$2, 3, 5, 7$

أي أن عدد الأعداد التي ليست أولية التي أقل من 120 هي

$27 + 4 = 31$

وبالتالي [illegible] 1 عدد أولي

س1 (د) نوجد الحل المتجانس $a_n^{(h)}$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$

$x = 3 \qquad x = -1$

$a_n^{(h)} = c_0(3)^n + c_1(-1)^n$

الآن نوجد الحل الخاص $a_n^{(p)} = n^{(*)}(c3^n)$

* عدد تكرار الحل 3

هنا تكرار مرة واحدة أي أن $a_n^{(p)} = c\,n\,3^n$

$cn3^n - 2c(n-1)3^{n-1} - 3c(n-2)3^{n-2} = 3^n$

$cn3^n - 2cn3^{n-1} + 2c3^{n-1} - 3cn3^{n-2} + 2c3^{n-1} = 3^n$

$cn3^n - \frac{2}{3}cn3^n - \frac{1}{3}cn3^n + \frac{2}{3}c3^n + \frac{2}{3}c3^n = 3^n$

$\Rightarrow \frac{4}{3}c3^n = 3^n \Rightarrow \frac{4}{3}c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4}$

$a_n^{(p)} = \frac{3}{4}n3^n$

$a_n = c_0(3)^n + c_1(-1)^n + \frac{3}{4}n3^n$

$a_0 = 0 \Rightarrow c_0 + c_1 = 0 \quad , \quad a_1 = \frac{7}{2}$

لا يكتب في هذا الهامش

تابع (ب)

(د) والسلام

$$a_n = \frac{5}{16}(3)^n - \frac{5}{16}(-1)^n + \frac{3}{4}n(3)^n$$

(هـ) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$a_0 = 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(2a_{n-1} + 3^{n-1})x^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(3x)^n$$

$$= 2x\,f(x) + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-3x} - 1\right]$$

$$f(x)(1-2x) = \frac{1}{3}\left[\frac{1-1+3x}{1-3x}\right] = \frac{3x}{1-3x}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{3x}{(1-2x)(1-3x)}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-3x}\right]$$

$$f(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{-3}{1-2x} + \frac{3}{1-3x}\right] = \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1-2x}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

$$a_n = 3^n - 2^n$$

والسلام

لا يكت
هذا اله

السؤال (ب)

نفرض (أ) G ... حيث $|V| = n$ $|E| = |V| - 1$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

نفرض ان G تتكون من ... مركبات

ان كل مركبة ... حيث $|E_i| \ge |V_i| - 1$

مركبة (V_i, E_i) ... $1 \le i \le m$

$|E| = \sum_{i=1}^{m} |E_i|$ $|V| = \sum_{i=1}^{m} |V_i|$

وبالتالي

$|E| \ge |V| - m$

من المعطيات $|E| = |V| - 1$

اي ان $m = 1$ وبالتالي G مركبة واحدة

نفرض ان G تحوي دورة وبالتالي $e \in C$

مركبة واحدة و $|E| = n - 2$

وهذا تناقض اذا G لا تحوي اي دورة

G مترابطة ولا تحوي اي دورة اي ان G شجرة

وبالتالي فانه يوجد ... يحقق العلاقة

باستثناء

(ب) لا يوجد ... الشجرة الغابة ... $|E| = |V| - 1$

ج) لا يوجد ...

½

لا يكتـ
هذا الهـ

١ جـ ، ب

س٣ (جـ)

(i) لا يكون $K_{n,m}$ مستوياً $\Longleftrightarrow$ $n,m \geq 3$

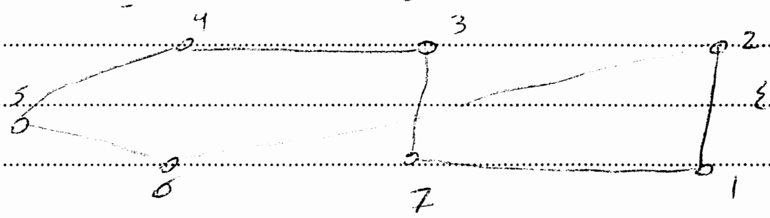
(ii) لا يكون $K_{n,m}$ أويلرياً $\Longleftrightarrow$ n فردي أو m فردي

(iii) لا يكون $K_{n,m}$ هاملتونياً $\Longleftrightarrow$ $m \neq n$

س٤

(أ) G ليس ثنائي التجزئة لأنه يحتوي على دورة فردية

(ب) أولاً كل رأس متصل بضلعين يكون الضلعين فعلاً ضمن الدورة
الهاملتونية التي نريد إيجادها أي أن $deg\, x = 2$
ثانياً إذا كان $deg\, x \geq 3$ فإننا نستخدم ضلعين فقط
لإيجاد الدورة الهاملتونية ونحذف الباقي



نحذف الضلع {٤ ، ١}
والضلع {٦ ، ٧}

بالتالي G هاملتوني

(جـ) بما أنه G يحتوي على دورة فردية فإن $\chi(G) \geq 3$ —①
ومن مبرهنة بروكس نجد أن

$\chi(G) \leq \Delta(G) = 3$ —②

من ① و ② نجد أن $\chi(G) = 3$