جامعة الملك سعود	الاختبار النهائي	الفصل الدراسي الأول
كلية العلوم	في المقرر	١٤٣١/١٤٣٢هـ
قسم الرياضيات	٤٣٤ ريض	الزمن: ٣ ساعات

أجب عن ١٠ من الأسئلة التالية.

س١ (أ) أثبت أن $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ لكل $n \geq k \geq 1$.

(ب) أثبت أن $S(n,k) = k\,S(n-1,k) + S(n-1,k-1)$ لكل $n \geq k \geq 2$.

س٢ أثبت أن عدد الدوال الشاملة من مجموعة عدد عناصرها m إلى مجموعة عدد عناصرها n، حيث $m \geq n$، يساوي

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

س٣ (أ) لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة التجاور للرسم G الذي رؤوسه $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ولتكن $A^m = [a_{ij}^{(m)}]$. أثبت أن $a_{ij}^{(m)}$ يساوي عدد المسارات المختلفة التي طولها m من v_i إلى v_j.

(ب) ليكن G رسماً مترابطاً مستوياً. أثبت أنه يوجد في G رأس x بحيث $\deg(x) \leq 5$.

س٤ (أ) لتكن T شجرة عدد رؤوسها $n \geq 2$. أثبت أنه يوجد في T رأسان درجة كل منهما تساوي 1.

(ب) لتكن T شجرة عدد رؤوسها n. أثبت أن $P_T(k) = k(k-1)^{n-1}$.

س٥ (أ) إذا كان G رسماً عدد رؤوسه n وكان كل من G_k و G'_m إغلاقاً للرسم G فأثبت أن $G_k = G'_m$

(ب) اكتب نص مبرهنة كوراتوسكي.

س٦ إذا كان G رسماً مستوياً فأثبت أن $\chi(G) \leq 5$.

س٧ جد عدد الأعداد الصحيحة x بحيث $1 \leq x \leq 1000$، 4 لا يقسم x، 5 لا يقسم x، 6 لا يقسم x.

س١ (أ) إذا كان $m, n \geq k \geq 0$ فأثبت أن

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \dots + \binom{m}{k}\binom{n}{0}$$

(ب) أثبت أن $S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$ لكل $n \geq 4$.

س٢ جد عدد طرق الحصول على المجموع 10 عند رمي 4 أحجار نرد مختلفة .

س٣ (أ) جد حل المسألة التالية :

$$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0 \quad \forall\ n \geq 2$$

$$a_0 = 1 \ , \ a_2 = 2$$

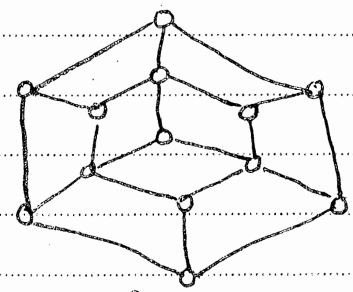
(ب) استخدم الدوال المولدة لحل المسألة التالية :

$$a_n = a_{n-1} + 2n \quad \forall\ n \geq 1$$

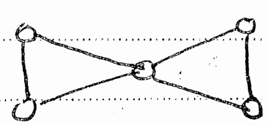
$$a_0 = 1$$

س٤ (أ) بين أن $5, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 1$ متتالية رسمية ثم جد تجسيداً لها .

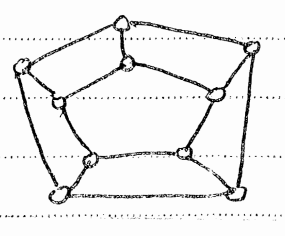
(ب) بين أن الرسم التالي ثنائي التجزئة وغير هاملتوني .



س٥ (أ) جد كثيرة الحدود اللونية للرسم التالي ثم استخدمها لحساب عدده اللوني .



(ب) إذا كان G هو الرسم التالي فأثبت أن $\chi(G) = 3$ بدون استخدام تلوين G .



السؤال السادس / لنفرض أن G رسم مستوي

$n \le 5 \Rightarrow \chi(G) \le n \le 6 \Rightarrow \chi(G) \le 6$

ولنفرض أن $n \ge 6$ وأن النتيجة صحيحة

لكل الرسوم المستوية التي أقل من n.

عليه يوجد رأس v يحقق $\deg v \le 5$

وبالتالي لنأخذ الرسم $H = G - v$

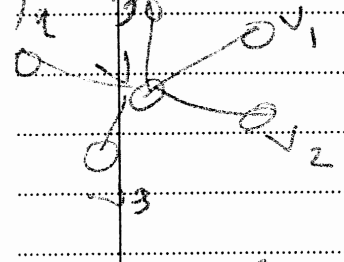
حيث H يحقق فرضية الاستقراء وهو قابل للتلوين من الدرجة 5.

(1) $\deg v < 5 \Rightarrow \deg v = |N(v)| = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

وعليه يوجد لون لم يستخدم في تلوين N(v) وبتلوين v بهذا اللون نحصل على رسم G ملون بالدرجة 5.

(2) $\deg v = 5$ وبالتالي $N(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$

ولتكن v_5 و v_4 و v_3 و v_2 و v_1 مرتبة حول v مع عقارب الساعة.



إذا وجد لون لم يستخدم في تلوين N(v) فإنه بتلوين v بهذا اللون نحصل على تلوين من الدرجة 5 لـ G.

لذلك نفترض أن v_1 و v_2 و v_3 و v_4 و v_5 ملونة بالألوان c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 ولنعتبر الرسم $H(c_1, c_3)$

إذا كان v_1 و v_3 ينتميان إلى مركبتين مختلفتين فإنه بإيجاد تلوين آخر لإحدى المركبتين في H نحصل على تلوين من الدرجة 5 لـ H وبالتالي إذا أوجد لون لم يستخدم في N(v) فإنه بتلوين v بهذا اللون نحصل على تلوين من الدرجة 5 لـ G.

لا يكتب في هذا الهامش

٢) وبما أن كل رأس من رؤوس G فإن v_2 و v_4 ينتميان الى مركبتين مختلفتين في الرسم $H(c_2,c_4)$ وبإعادة تلوين إحدى المركبتين في هذا الرسم نحصل على تلوين من الدرجة 5 لـ G

السؤال الرابع

(أ) لنفرض أن T شجرة وأن $P = v_1 — v_m$ ممر ذو طول أعظمي في T . حيث $n \geq 2$, $m \geq 2$

لأن T تحتوي على ضلع .

(1) اذا كان $v_1 v_k$ ضلع في T فإن $v_1 v_2 — v_k v_1$ ؛ لأي $2 \leq k \leq m$

دورة في T وهذا يناقض ~~كون~~ كون T شجرة .

(2) $X v_1$ ليس ضلع في T حيث $X \notin V(P)$ لأن P ممر ذو طول أعظمي .

وبالتالي $deg(v_m) = 1$, $deg(v_1) = 1$

(ب) ~~تابع السؤال الرابع $v_1, v_2, ..., v_n$~~

~~اذا كان رأس من G هو $V = \{ ... \}$~~

~~حيث كل رأس مستوى متجاور~~

~~فإن G الى مستوى ضلع و $e \leq 3v - 6$~~

~~ونفرض العكس أن $deg\, v \geq 6$~~

~~من مبرهنة $\sum_{v \in V} \deg v = 2e$~~

تابع السؤال الرابع فقرة (ب)

T شجرة بعدد رؤوسها n

ولنستخدم الإستقراء الرياضي على n.

$n=1$ $\qquad P_T(k) = k$

لنفرض صحة المبرهنة عندما $n = k$

ونبرهنها لـ $n = k+1$.

بما أن T شجرة فإن يوجد رأس ورقية

ولتكن v $\quad deg(v) = 1$.

وليكن u رأس مجاور لـ v

من فرضية الإستقراء نجد أن

$$P_{T-v}(k) = k(k-1)^{k-1}$$

وحيث أن $T-v$ شجرة وهو رسم مترابط

ولا يحتوي على دورات ... من الألوان u المجاور

للرأس v مختلف عن u فإن

$$P_T(k) = (k-1)\,P_{T-v}(k) = k(k-1)^{k}$$

السؤال الخامس.

(مبرهنة كوراتوسكي.)

(ب) الرسم G رسم مستوي إذا وفقط إذا كان لا يحتوي على رسم جزئي يكون قسم للرسم K_5 أو $K_{3,3}$.

(ج) لنفرض أن $e_1, e_2, \ldots, e_k$ هي متتالية الأضلاع التي أضيفت إلى G للحصول على G_k.

ولتكن $f_1, \ldots, f_m$ هي متتالية الأضلاع التي أضيفت إلى G للحصول على G_m.

وسوف نبرهن أن كل ضلع $e_i \in E(G_m)$ وأن كل $f_i \in E(G_k)$ لكل $1 \le i \le k$

ولغرض التناقض نفرض أن $e_i \notin E(G_m)$ حيث i أصغر دليل و $e_i = xy$.

خذ $H = G + \{e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}\}$ x فقط أن H رسم جزئي من الرسمين G_m و G_k.

من تعريف G_k $\deg_H x + \deg_H y \ge n$

وبالتالي فإن

$$\deg_{G_m} x + \deg_{G_m} y \ge \deg_H x + \deg_H y \ge n$$

وهذا يناقض كون x و y لا يتجاوران في G_m.

$\therefore$ كل ضلع $e_i \in E(G_m)$

وبالمثل كل $f_i \in E(G_k)$.

السؤال الثاني/ لنفرض أن X مجموعة عدد عناصرها m و Y مجموعة عدد عناصرها n ولنعرف U مجموعة الدوال $f: X \to Y$

ولنعرف $Y = \{b_1, \dots, b_n\}$

$$A_k = \{f \in U : b_k \notin R(f)\}$$

حيث $R(f)$ هو مدى f.

من الواضح أن $|U| = n^m$

والمطلوب هنا هو

$$|U - (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k)| = |U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots + (-1)^n \alpha_n$$

من تعريف A_k نجد أنها الدالة المعرفة من X الى المجموعة $Y \setminus \{b_k\}$ وبالتالي نجد أن

$$|A_k| = (n-1)^m$$

وبما أن

$$\alpha_1 = |A_1| + \dots + |A_n|$$

4 1/2

$$= (n-1)^m + \dots + (n-1)^m = n(n-1)^m$$

وأيضاً نلاحظ أن $|A_i \cap A_j|$ هو الدالة المعرفة من X الى $Y \setminus \{b_i, b_j\}$ حيث $1 \le i < j \le n$ و $i \neq j$

وبالتالي فإن $|A_i \cap A_j| = (n-2)^m$

$$\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_1 \cap A_j| + |A_2 \cap A_3|$$

$$+ \dots + |A_i \cap A_j|$$

$$= \binom{n}{2} (n-2)^m$$

وبالمثل نجد أن

$$\alpha_k = \binom{n}{k} (n-k)^m$$

السؤال الأول /

(ب) لتكن A مجموعة عناصرها n و B مجموعة عدد عناصرها K . بما أن ~~$\binom{n}{K}$ هو عدد المجموعة الجزئية من n التي عدد عناصرها K فإننا~~

إما $a_n \in B$ أو $a_n \notin B$

(1) عدد المجموعات الجزئية من A من السعة K والتي لا تحوي a_n يساوي

عدد المجموعات الجزئية من $A-\{a_n\}$ من السعة K

وتساوي ~~a_n~~ $\binom{n-1}{K}$

(2) عدد المجموعات الجزئية من A من السعة K

والتي تحوي a_n يساوي عدد المجموعات الجزئية من $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ من السعة

K-1 وتساوي $\binom{n-1}{K-1}$

وبالتالي من مبدأ الجمع نحصل على

$$\binom{n}{K} = \binom{n-1}{K} + \binom{n-1}{K-1}$$

تابع السؤال الأول فقرة (2)

لا يكتب في هذا الهامش

(ب) لنفرض أن $N=\{1,2,\dots,n\}$ و

$N'=\{1,2,\dots,n,n+1\}$. عدد تجزئات المجموعة N'

الى K مجموعة نحصل عليها بطريقتين وهي

(م) تجزئ المجموعة N الى $K-1$ تجزئة

ثم نضيف المجموعة $\{n+1\}$ الى تلك التجزئة

فنحصل على $S(n+1,K-1)$

(ب) تجزئ المجموعة N الى K تجزئة ثم نكرر

المجموعة وعددها (K جزء)

ونضيف $n+1$ اليها .

ويكون ذلك ب $KS(n-1,K)$.

وبالتالي من مبدأ الجمع

$$S(n,K)=KS(n-1,K)+S(n-1,K-1)$$

السؤال الثالث

(ج) بين رسم مترابط ومستوي $\deg v\geq 5$

$\deg v\geq 6$

ولغرض التناقض نفرض أن $deg\, v\geq 6$ هو G

$V(G)=\{v_1,\dots,v_n\}$ وبالتالي من مبرهنة

(1) $2e=\sum_{v\in V}\deg v=v_1+v_2+\dots+v_n\geq 6v$

وبما أن G رسم مترابط ومستوي

فإن $e\leq 3v-6 \Rightarrow 2e\leq 6v-12 \Rightarrow$ (2)

ومن (1) و (2) نحصل على

$6v-12\geq 2e\geq 6v$

$\Rightarrow 6v-12\geq 6v$

$-12\geq 0$ تناقض

لا تكتب في الهامش

تابع السؤال الثالث فقرة (أ)

نستخدم الاستقراء الرياضي على m

إذا كان V_i يجاور V_j

$m=1$ فإن $A = a_{ij} = 1$

وعليه يوجد مسار طوله 1 من الرأس V_i إلى الرأس V_j

نفرض صحة المبرهنة لـ $m=k-1$ ونثبتها لـ $m=k$.

مرحلة الاستقراء

~~لـ~~ $A^{k-1} = [a_{ij}^{(k-1)}]$

عدد المسارات من الطول m ذكرره المسار من V_i الرأس V_j ضعف المسار من الطول $m-1$

يصدر من الضلع V_iV_k و V_kV_j ومن ضرب المصفوفة لأجزاء

$$A^{m=k} = \sum_{i=0}^{k} \overline{a_{ik}^{k-1}}\, a_{kj} = \sum^{k} a_{ij}^{m}$$

السؤال السابع

$U = \{x \in U : 1 \le x \le 1000\}$

و $A_1 = \{x \in U : 4 | x\}$ و $A_2 = \{x \in U : 5 | x\}$ و

$A_3 = \{x \in U : 6 | x\}$

المطلوب هو

$|U - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = |U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$

لاحظ أن

$|U| = 1000$

$|A_1| = \left\lfloor \frac{1000}{4} \right\rfloor = \lfloor 250 \rfloor = 250$

$|A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{\ } \right\rfloor$

لا يكتب
هذا الهـا

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{Lcm(4,5)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{20} \right\rfloor$$

$$= 50 \quad ، \quad Lcm(4,5) = 20$$

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{Lcm(4,6)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{12} \right\rfloor$$

$Lcm(4,6) = 12$

$$= \lfloor 83,33 \rfloor = 83$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{Lcm(5,6)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor$$

$$= \lfloor 33,333 \rfloor = 33$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{Lcm(4,5,6)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{60} \right\rfloor$$

$$= \lfloor 16,66 \rfloor = 16$$

$$\Rightarrow |U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$$

$$|U| = 1000 \,,\quad \alpha_1 = \overset{250}{|A_1|} + \overset{200}{|A_2|} + \overset{166}{|A_3|} = 616$$

$$\alpha_2 = \overset{50}{|A_1 \cap A_2|} + \overset{33}{|A_2 \cap A_3|} + \overset{83}{|A_1 \cap A_3|} = 166$$

$$\alpha_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 16$$

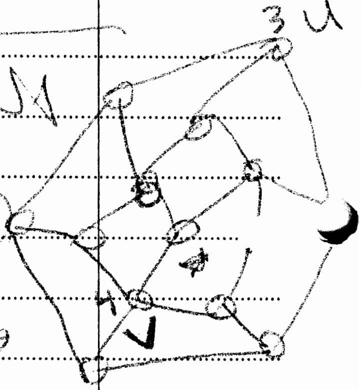
والتعويض نجد أن

$$1000 - 616 + 166 - 16$$

لا يكتب في هذا الهامش

~~j = 1,2,3,4~~

السؤال الحادي عشر (11)



ب) الرسم لا يحتوي على دورة فردية وبالتالي ثنائي التجزئة

$1 = |V_1| \neq |V_2| = 3 \Rightarrow G$ ليس هاملتوني

ط

$S = (5,5,4,3,2,2,2,1)$

$S'_1 = (4,3,2,1,1,2,1) \Rightarrow S_1 = (4,3,2,2,1,1,1)$

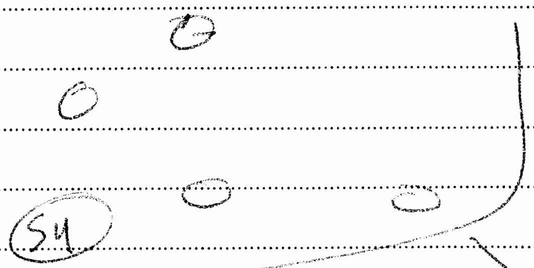
$S'_2 = (2,1,1,0,1,1)$

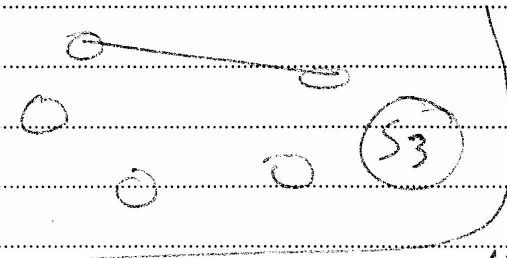
$\Rightarrow S_2 = (2,1,1,1,1,0)$

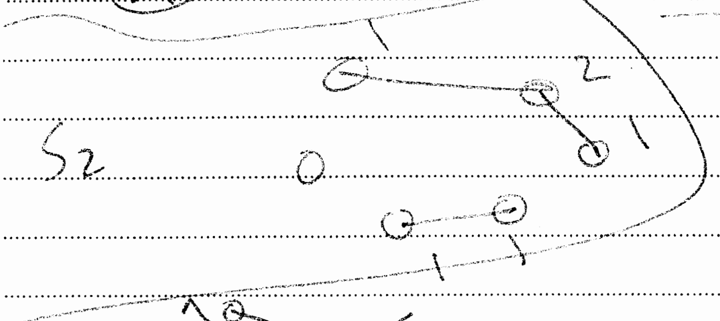
$S'_3 = (0,0,1,1,0)$

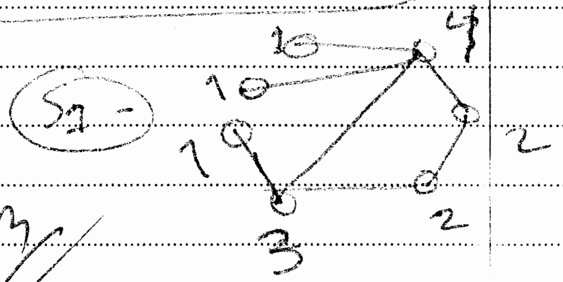
$S_3 = (1,1,0,0,0)$

$S_4 = (0,0,0,0)$ وبالتالي S رسومية والتمثيل هو







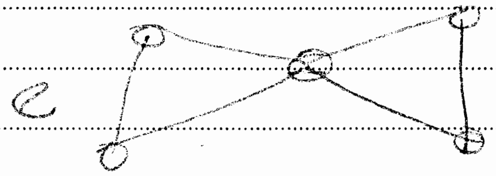


3/

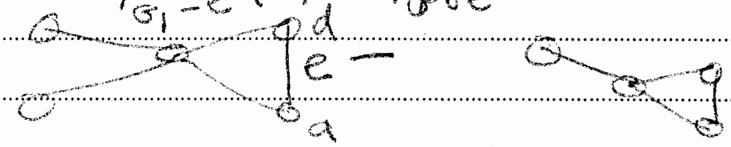
لا يكتب
هذا الهامش

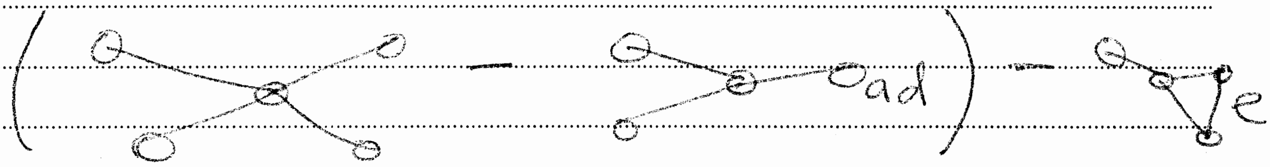
السؤال الثاني عشر ١٢

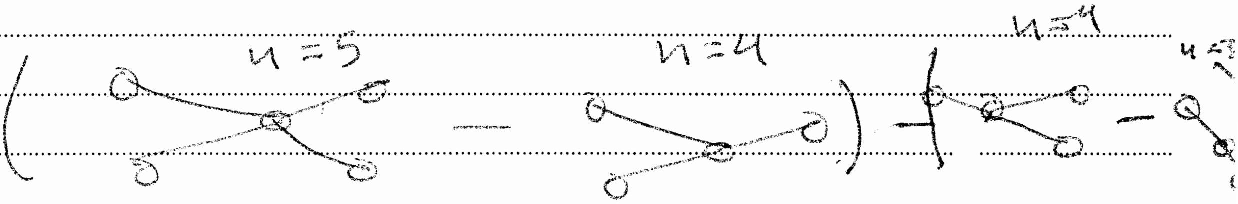
$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G\circ e}(k)$$



$$P_{G_1-e}(k) - P_{G\circ e}(k)$$

$P_G(k) =$ 





$$= \left(K(K-1)^4 - K(K-1)^3\right) - K(K-1)^3 + K(K-$$

$$= K(K-1)^4 - 2K(K-1)^3 + K(K-1)^2$$

$$= K(K-1)^2\left((K-1)^2 - 2(K-1) + 1\right)$$

3

$$= K(K-1)^2\left(K^2-2K+1-2K+2+1\right)$$

$$= \left(K\left(K^2-2K+1\right)\right)\left(K^2-4K+4\right)$$

$$= \left(K^3-2K^2+K\right)\left(K^2-4K+4\right) =$$

$$P_G(k) = K^5 - 2K^4 + K^3 - 4K^4 + 8K^3 - 8K^2 + 4K^3 - 8K^2$$

$$+4K$$

ب) من نظرية بروكس $\chi(G) \le \Delta(G)$

وهنا $\Delta(G)=3$

$\therefore \chi(G) \le 3 \Rightarrow \chi(G) \le 3$

ولكن هذا الرسم يحتوي على دورة فردية
وبالتالي $\chi(G) \ge 3$.

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

السؤال الثامن

أ) ضع $A=\{x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n\}$

عدد المجموعات الجزئية من السعة K المأخوذة من
عناصر A تكون كالتالي:

1) K عنصر من y و 0 عنصر من x $\binom{m}{0}\binom{n}{k}$

2) K-1 عنصر من y و عنصر واحد من x $\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}$

3) K-2 عنصر من y و عنصرين من x $\binom{m}{2}\binom{n}{k-2}$

وهكذا إلى أن نصل إلى

0 عنصر من y و K عنصر من x $\binom{m}{k}\binom{n}{0}$

ومن مبدأ الجمع نحصل على المطلوب .

ب) لنفرض أن P تجزئة ~~عناصرها~~ $P=\{P_1, \dots, P_{n-2}\}$
و A مجموعة عناصرها $A=\{A_1, \dots, A_n\}$

عدد التجزيئات للمجموعة A من P تكون على الشكل التالي

1) ~~التجزئة~~ تحتوي على 3 عناصر والتجزيئات n-3 الأخرى
تحتوي على عنصر واحد وهذه التجزئة تكون بـ $\binom{n}{3}$

a_1, a_2, a_3, a_4

$\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}$ و $\{a_1, a_3\}$ و $\{a_2, a_4\}$

$\{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}$

وبالتالي تتم هذه التجزئة ب $3\binom{4}{4}$.

من مبدأ المجموع للعد نحصل على

$$S(4, 4-2) = \binom{4}{3} + 3\binom{4}{4}$$