جامعة الملك سعود	الاختبار النهائي	الفصل الدراسي الأول 1434/1433هـ
كلية العلوم	في المقرر 431 ريض	الزمن: ثلاث ساعات

ملحوظة: كل الرسوم المدروسة هنا هي رسوم بسيطة.

الجزء الأول: (10 درجات) أجب عن كل من الأسئلة التالية:

1) (درجة واحدة) جد عدد رؤوس غابة عدد أضلاعها 17 و عدد مركباتها 3.
2) (درجة واحدة) جد العدد الصحيح p إذا علمت أن المتتالية غير المتزايدة (p,4,4,3,3,2,1) متتالية رسمية.
3) (درجة واحدة) جد معامل $X^2 Y^4 Z^7$ في مفكوك $(X + Y + Z)^{13}$
4) (درجة واحدة) جد عدد تباديل $1, 2, \dots, n$ التي تترك بالضبط 3 أعداد في أماكنها الطبيعية، حيث $n \geq 4$ عدد صحيح.
5) (درجة واحدة) جد عدد التباديل f للمجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$ بحيث $[\, f(1) = 2 , f(2) = 3]$ ، حيث $n \geq 4$ عدد صحيح.
6) (درجة واحدة) جد عدد تباديل حروف الكلمة "ITISNOTPRIME" بحيث I لا يجاور I.
7) (درجتان) جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27$ إذا كان $x_1 > -2, x_2 > 13, x_3 \geq 0, x_4 \geq 5$
8) (درجتان) جد عدد الأعداد الصحيحة x بحيث : $1 \leq x \leq 250$، 3 لا يقسم x، 5 لا يقسم x، 6 لا يقسم x.

الجزء الثاني : (8 درجات) أجب عن كل من الأسئلة التالية:

1) (3 درجات) أثبت أن عدد التباديل التامة للمجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$، حيث $n \geq 2$ عدد صحيح، هو:

$$d_n = n!\,(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

2) (درجتان) أعط برهانا تركيبيا للمتطابقة $\binom{4n}{2} = 2\binom{2n}{2} + 4n^2$، حيث n عدد صحيح موجب.

3) (درجتان) عمل سائق سيارة لمدة 131 ساعة خلال فترة 15 يوما. أثبت أنه توجد ثلاثة أيام متعاقبة عمل خلالها السا ئق لمدة 27 ساعة على الأقل.

4) (درجة واحدة) أثبت أن عدد عناصر المجموعة $\{(A,B): A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}\}$ يساوي 3^n، حيث n عدد صحيح موجب.

الجزء الثالث : (22 درجة) أجب عن كل من الأسئلة التالية:

1) (درجة واحدة) أثبت أنه إذا كان $G = (X, Y, E)$ رسما ثنائي التجزئة، فإن:

$$|E| = \sum_{x\in X} \deg(x) = \sum_{y\in Y} \deg(y)$$

2) (أ) (درجتان) أثبت أن الشجرة التي عدد رؤوسها n، حيث $n \geq 2$، يوجد فيها على الأقل رأسان درجة كل منهما تساوي 1.

(ب) (درجتان) أثبت أن الشجرة التي عدد رؤوسها n، عدد أضلاعها n-1.

3) (درجتان) إذا كان G رسما بحيث $\delta(G) \geq k$، فأثبت أن G يحتوي على ممر طوله على الأقل k.

4) (درجتان) إذا كان $G = (V,E)$ رسما منتظما من النوع 7، حيث $|V| \geq 16$،

فأثبت أن متمم الرسم G هو رسم هاملتوني.

5) (أ) (3 درجات) إذا كان G رسما مستويا مترابطا عدد رؤوسه v و عدد أضلاعه $e \geq 3$،

فأثبت أن : $e \leq 3v-6$.

(ب) (درجة واحدة) أثبت أن " $e \leq 3v-6$ " متحققة أيضا عندما يكون الرسم G في (أ) غير مترابط.

(ج) (درجة واحدة) إذا كان H رسما بحيث $\delta(H) \geq 6$، فأثبت أن الرسم H ليس مستويا.

6) جد جميع قيم n, m بحيث:

(أ) يكون الرسم $K_{m,n}$ أويلريا. (درجة واحدة)

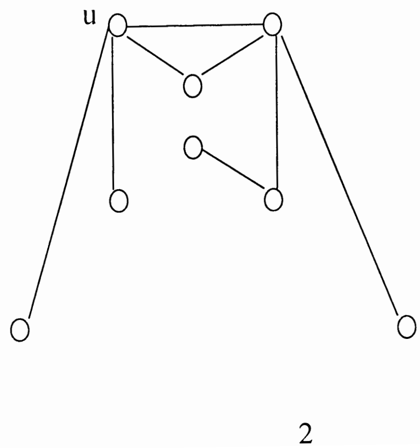
(ب) يكون متمم الرسم $K_{m,n}$ منتظما. (درجة واحدة)

(ت) يكون متمم الرسم $K_{m,n}$ مستويا. (درجة واحدة)

(ث) يكون متمم الرسم $K_{m,n}$ ثنائي التجزئة. (درجة واحدة)

(ج) يكون متمم الرسم $K_{m,n}$ غابة. (درجة واحدة)

7) (3 درجات) للرسم الممثل أدناه، جد *شجرة تقص عرضي* جذرها u و *شجرة تقص* عمقي جذرها u.



الجزء الأول 9

جد عدد رؤوس غابة عدد أضلاعها 17، وعدد مركباتها 3

لنفرض أن عدد الرؤوس $e=17$ ، عدد المركبات $k=3$

وعدد الرؤوس v

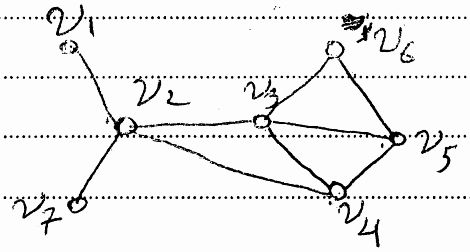
نظرية $e = v - k$

$\Rightarrow v = e + k = 17+3 = 20$

---

2 - جد العدد الصحيح p إذا علمت أن المتتالية
$(p,4,4,3,3,2,1)$ غير اعتيادية متتالية رسمية
$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$

تكون المتتالية رسمية إذا كانت $p=1$
وهذا تجسيدها



$v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_6\ v_7$
$(1,4,4,3,3,2,1)$

0.5

نلاحظ أن

$\deg v_1 = 1$

$\deg v_2 = 4$

$\deg v_3 = 4$

$\deg v_4 = 3$

$\deg v_5 = 3$

$\deg v_6 = 2$

$\deg v_7 = 1$

لا يكتب في
هذا الهامش

3) جد معامل $x^2 y^4 z^7$ في مفكوك $(x+y+z)^{13}$

حد المفكوك هو

$$\binom{13}{2,4,7} = \frac{13!}{(2!)(4!)(7!)}$$ 1

4) جد عدد التباديل $1,2,\dots,n$ التي تترك 3 أعداد في مكانها الطبيعي حيث $n \geq 4$ عدد طبيعي

الحل

لدينا اختيار 3 أعداد من n عدد أي انه $\binom{n}{3}$ ونجري تبديل تام للبقية كالتالي 1

عدد التباديل $N = \binom{n}{3} d_{n-3}$

5) جد عدد التباديل f للمجموعة $\{1,2,\dots,n\}$ بحيث $[f(2)=3, f(1)=2]$

عدد التباديل $N = (n-2)!$ 1

لاننا نثبت اثنين تحديد ونبادل البقية

6) جد تباديل حروف الكلمة TISNOTPRME بحيث لا يجتمع I و I

نكتب الكلمة بدون الحرف I فتصبح 1+1

$^T{}_\wedge{}^S{}_\wedge{}^N{}_\wedge{}^O{}_\wedge{}^T{}_\wedge{}^P{}_\wedge{}^R{}_\wedge{}^M{}_\wedge{}^E{}_\wedge$

لنا 10 أماكن نريد اختيار ثلاثة منها فتكون

وتباديل الكلمة من غير I هي

$\frac{9!}{2!}$ لأن T مكرر

من مبدأ حاصل الضرب

لا
ها

7) جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة

$$x_1+x_2+x_3+x_4=27$$

~~$y_1 = x_1+2 \ge 0$~~ ← $\cancel{x_1 \ge -3}$ خطأ حيث أن $x_1 > -2$

لأنك تتعامل مع الأعداد الصحيحة ← $x_2 \ge 14$ خطأ حيث أن $x_2 > 13$

$x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 5$

$y_1 = x_1+3 \ge 0$; $y_2 = x_2-14 \ge 0$, $y_3 = x_3$, $y_4 = x_4-5$

$\Rightarrow y_1-3 = x_1$; $y_2+14 = x_2$, $y_3 = x_3$, $y_4+5 = x_4$

بالتعويض

$$y_1-3+y_2+14+y_3+y_4+5=27$$

$$\Rightarrow y_1+y_2+y_3+y_4 = 11$$

عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $N = \binom{4-1+11}{11} = \binom{14}{11}$

لا يكتب في هذا الهامش

9

الجزء الثاني

أثبت أن عدد التباديل الثابتة للمجموعة $\{1,2,\dots,n\}$ حيث $n\geq 2$ عدد صحيح هو

$$d_n = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

البرهان

نكتب $U=S_n$ ، ولنضع $A_k=\{f\in U : f(k)=k\}$ والمطلوب حساب $|U-(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)|$ مع العلم أن $|S_n|=n!$

الآن نحسب α_1 من العلاقة

$$\alpha_1=|A_1|+|A_2|+\dots+|A_n|$$

من تعريف A_k نجد أن $|A_k|$ يمثل عدد التباديل الثابتة لمجموعة $\{1,2,\dots,n\}\setminus\{k\}$ أي أن $|A_k|=(n-1)!$

وبالتالي فإن $\alpha_1=n(n-1)!$ أي أن $=\frac{n!}{1!}$

لنحسب $\alpha_2=\cancel{|A_1\cap A_2|+\dots+|A_1\cap A_n|+\dots}$

$$=|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+\dots+|A_1\cap A_n|+|A_2\cap A_3|+\dots+|A_{n-1}\cap A_n|$$

نلاحظ أن $|A_i\cap A_j|\ (i\neq j)$ تمثل عدد تباديل المجموعة $\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j\}$

أي أن $|A_i\cap A_j|=(n-2)!$

وبالتالي فإن $\alpha_2=\binom{n}{2}(n-2)!=\frac{n!}{2!}$

وبنفس الطريقة نجد أن $\alpha_k=\binom{n}{k}(n-k)!=\frac{n!}{k!}$

الآن

$$|U-(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)|=$$

$$|U|-\alpha_1+\alpha_2-\dots+(-1)^n\alpha_n=n!-\frac{n!}{1}+\frac{n!}{2!}-\dots+(-1)^n\frac{n!}{n!}$$

وبأخذ $n!$ عامل مشترك نجد أن

$$d_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\dots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right) \quad \square$$

3

أعط برهاناً "تركيبياً" للمتطابقة $\binom{4n}{2} = 2\binom{2n}{2} + 4n^2$

الحل

لدينا صندوق به $4n$ كرات فيه $2n$ كرات بيضاء و $2n$ كرات حمراء ونريد اختيار كرتين من هذا الصندوق

لذا

عدد الكرات البيضاء = عدد الكرات الحمراء

$$\binom{4n}{2} = \binom{2n}{2} + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{1}\binom{2n}{1}$$

كلا الكرتين حمراء — كلا الكرتين بيضاء — كرة حمراء والكرة بيضاء

$$= 2\binom{2n}{2} + (2n)(2n)$$

$$= 2\binom{2n}{2} + 4n^2$$

Good

1

(3) 131 ساعة خلال فترة 15 يوماً أثبت أنه توجد ثلاثة أيام متتالية عمل خلالها الساعي طوال 27 ساعة على الأقل

الحل

الأيام التي عمل خلالها الساعي

1 2 3	4 5 6	7 8 9	10 11 12	13 14 15
الصندوق 1	الصندوق 2	الصندوق 3	الصندوق 4	الصندوق 5

إذاً الصناديق هي $n=5$ والكرات هي $m=131$ ساعة

إذاً من مبدأ برج الحمام يوجد صندوق $m>n$ به على الأقل

$$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$$

$$= \left\lfloor \frac{131-1}{5} \right\rfloor + 1 = 26 + 1 = 27$$

إذاً يوجد صندوق به 27 كرة أي أنه يوجد ثلاثة أيام متتالية عمل خلالها 27 ساعة على الأقل

لا يكتب في هذا الهامش

أثبت أن عدد عناصر المجموعة $\{(A,B): A\subseteq B\subseteq \{1,2,\dots,n\}\}$ يساوي 3^n

السؤال الثالث

13,5

1) أثبت أنه إذا كان $G=(X,Y,E)$ رسماً ثنائي فئة:

$$|E|=\sum_{x\in X}\deg x=\sum_{y\in Y}\deg(y)$$

البرهان

كل ضلع xy في G يعد مرة واحدة بالضبط في $\sum_{y\in Y}\deg y$ وفي $\sum_{x\in X}\deg(x)$ وبالتالي فإن

$$|E|=\sum_{x\in X}\deg x=\sum_{y\in Y}\deg(y)$$

2) أثبت أن الشجرة التي عدد رؤوسها n حيث $n\geq 2$ تحتوي على الأقل رأسين درجة كل منهما تساوي 1

البرهان

لتكن $T=(V,E)$ شجرة ولتكن ~~$P=v_1v_2\dots v$~~

مساراً ذا طول أعظمي $P=v_1v_2\dots v_m$

~~T ضلعاً في v_1v_k~~ ولتكن $m\geq 2$

لأن T لا تحتوي على ضلع

ليكن v_1v_k ضلعاً في T من أجل ~~$2\leq k\leq m$ وبالتالي~~

~~نحصل~~ ضلعاً في T من أجل $3\leq k\leq m$

فإننا نحصل على الدورة $v_1v_2\dots v_kv_1$ ...

لا يك
هذا ا

الآن إذا كان xv_1 ضلعاً في T و $x \notin V(P)$ فإن
المسار $P' = xv_1v_2 \cdots v_m$ أطول من P
وهذا تناقض مع كون P هو الأطول وبالتالي
فإن $\deg(v_1)=1$ وبنفس الطريقة $\deg(v_m)=1$ □

(ب) أثبت أن الشجرة التي عدد رؤوسها n، عدد أضلاعها $n-1$

البرهان: لتكن $T=(V,E)$ شجرة
باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس
في حال $n=1$ فإن الشجرة T تماثل K_1 والعبارة صحيحة في هذه الحالة

الآن نفرض صحة العبارة من أجل $k \geq 1$.

لتكن T شجرة عدد رؤوسها $k+1$ وليكن v
أحد الرأسين اللذين درجتهما واحد حسب (أ)
ولنأخذ e أحد الضلع الذي أحد طرفيه v، نلاحظ أن
$T-v$ رسم مترابط لأن T مترابط و $\deg v=1$ وليس به دورات
لأن T ليس به دورات وبسبب ذلك نجد أن $T-v$ شجرة
وبالتالي حسب فرضية الاستقراء نجد أن عدد رؤوس $T-v$
هو k وعدد أضلاعها هو $k-1$ وبالتالي فإن عدد
الأضلاع T هو k □

إذا كان $G=(V,E)$ رسماً بحيث $\delta(G)\geq k$ فأثبت أنه يحتوي على ممر طوله على الأقل k

البرهان:

ليكن $P = v_1 v_2 \text{———} v_m$ ممراً ذا طول أعظمي، إذا كان xv_1 ضلعاً في G و $x\notin V(P)$

فإننا نقع في تناقض مع كون P أعظمي وبالتالي فإن جميع الرؤوس التي تجاور v_1 موجودة في الممر P وعددها على الأقل k لأن $\delta(G)\geq k$

وبالتالي نحصل على الممر المطلوب

$v_1 v_2 \text{———} v_{k+1}$

4) إذا كان $G=(V,E)$ رسماً منتظماً من

إذا كان G رسماً مستوياً مترابطاً عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه $e \geq 3$ فإنه $e \leq 3v-6$

البرهان

ليكن G رسماً مستوياً مترابطاً وليكن v عدد رؤوسه و e عدد أضلاعه و f عدد أوجهه ولنضع $H=(X,Y,E')$ رسماً ثنائي التجزئة بحيث أن

$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_e\}$ $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_f\}$ يكون xy ضلعاً في H إذا كان x أحد الأضلاع التي تحد الوجه y. لكل وجه y

فلاحظ أن $\deg_H(y) \geq 3$ لأن عدد رؤوس الدورة على الأقل 3 كما أنها الوجه الخارجي لأن $e \geq 3$ وأن $\deg_H x \leq 2$

لأن الضلع لا يمكن أن يحد أكثر من وجهين، بالتالي فإن

$2e \geq |E'| \geq 3f$. من أوجلر نجد أن

$v-e+f=2$ وبالتالي فإن $3v-3e+3f=6$

أي أن $3v-3e+2e \geq 6$ لأن $2e \geq 3f$

وهكذا فإن $3v-e \geq 6$

أي أن $e \leq 3v-6$

(ب) إذا كان G غير مترابط فإن $\bar{G}$ مترابط (برهنه)

ونستطيع اثبات أن $e \leq \bar{e}$

وبالتالي فإنه من (أ) $\bar{e} \leq 3v-6$

وهكذا فإن $e \leq 3v-6$

لا يكتب في
هذا الهامش

(ج) ليكن H بيانا مستويا بسيطا
إذا كان H مستويا فإنه يوجد رأس x بحيث
$\deg x \leq 5$

أما العكس
إذا كان $\delta(H) \geq 5$ فإن H ليس مستويا

الحل
من نتيجة

$2e = \deg(x_1) + \deg(x_2) + \cdots + \deg(x_n) \geq 6 + 6 + \cdots + 6 = 6v$

لدينا أن

$2e \geq 6v$

و $e \leq 3v - 6$ من (ب)

أي أن $2e \leq 6v - 12$

لدينا

$2e - 6v \geq 0$

$-2e + 6v - 12 \geq 0$

أي أن $-12 \geq 0$ وهذا تناقض

(أ) يكون $K_{m,n}$ أويلرياً إذا وفقط إذا كان m,n أعداداً زوجية

(ب) يكون $K_{m,n}$ منتظماً إذا وفقط إذا كان $m=n$ ومن المعلوم أن متمم الرسم المنتظم هو رسم منتظم بالتالي فإن

~~[illegible]~~ متمم الرسم $K_{m,n}$ منتظم $\Longleftrightarrow$ $m=n$

Good

Good

يكون متمم الرسم ~~[illegible]~~ $K_{m,n}$ مستوياً ~~[illegible]~~ لجميع $m,n \in \mathbb{Z}^+$

ث) يكون متمم الرسم ثنائي التجزئة $K_{m,n}$ إذا وفقط إذا كان $m=n$

ج) يكون متمم الرسم $K_{m,n}$ غابة إذا وفقط إذا كان إما $m=1$ و $m \in \mathbb{Z}^+$ أو $m=1$, $n \in \mathbb{Z}^+$

لا يكتب في
هذا الهامش