ملحوظة: كل الرسوم المدروسة هنا هي رسوم بسيطة.

أجب عن كل من الأسئلة التالية:

السؤال ١:

أ) (درجتان) إذا كان $G=(X,Y,E)$ رسماً ثنائي التجزئة، فأثبت أن:

$$|E|=\sum_{x\in X}\deg(x)=\sum_{y\in Y}\deg(y)$$

ب) لتكن المتتالية $D=(3, 3, 3, 3, 3, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7)$.

i) (درجتان) بين فيما إذا كانت المتتالية D رسمية.

ii) (درجتان) أثبت أنه لايوجد رسم ثنائي التجزئة بحيث تكون المتتالية D متتالية درجات له.

السؤال 2:

أ) (درجتان) أثبت أن الشجرة التي عدد رؤوسها n يكون عدد أضلاعها $n-1$.

ب) (درجتان) إذا كان G رسما عدد رؤوسه n و عدد أضلاعه e و عدد مركباته k ، فأثبت أن $e \geq n-k$.

ج) (درجة و نصف) أوجد قيم n, m بحيث يكون الرسم $K_{n,m}$ أويلريا.

د) (درجة و نصف) أوجد قيم n بحيث يكون متمم الرسم C_n أويلريا.

هـ) (درجة و نصف) أعط مثالا لرسم غير هاملتوني عدد رؤوسه 7 و عدد أضلاعه 16.

السؤال 3 :

أ) (درجة و نصف) هل يوجد رسم مستو، عدد رؤوسه 90 و عدد أضلاعه 96 وعدد أوجهه 7 ؟ (علل الإجابة).

ب) (3 درجات) إذا كان G رسما مستويا مترابطا عدد رؤوسه v و عدد أضلاعه e و طول أقصر دورة فيه يساوي k، فأثبت أن $e \leq \dfrac{k}{k-2}(v-2)$.

ج) ليكن G رسما عدد رؤوسه 12 و عدد أضلاعه 14 بحيث درجة كل من رؤوسه تساوي 2 أو 3.

i) (درجة ونصف) أوجد متتالية درجات الرسم G.

ii) (درجة ونصف) أعط مثالا للرسم G.

السؤال 4 :

أ) (3 درجات) إذا كان n, k عددين صحيحين موجبين ، فأثبت أن:

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k)$$

ب) (3 درجات) جد عدد الأعداد الصحيحة x بحيث :

$1 \le x \le 400$, 3 لا يقسم x , 5 لا يقسم x , 6 لا يقسم x .

ج) ليكن n عددا صحيحا بحيث $n \ge 6$.

جد عدد التباديل f للمجموعة $\{1, 2, \ldots, n\}$ في كل من الحالتين التاليتين:

i) (درجة ونصف) f تترك كل عدد زوجي في موضعه الطبيعي و تجعل كل عدد فردي في غير موضعه الطبيعي .

ii) (درجة ونصف) $f(1) = 2$ و $f(2) = 1$ و f تترك بالضبط ثلاثة أعداد في أماكنها الطبيعية .

السؤال 5:

أ) (درجتان) جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ بحيث:

$$x_1 \ge 3 \ , \quad x_2 \ge -2 \ , \ x_3 > 6 \ , \ x_4 > 7$$

ب) (درجتان) أو جد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = r$$

بحيث x_1, x_2, x_3 أعداد فردية و x_4, x_5 عددان زوجيان.

ج) (درجتان) أعط برهانا تركيبيا للمتطابقة: $\binom{n+m}{2} = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + nm$ ،

حيث $n \ge ٢$ و $m \ge ٢$ عددان صحيحان .

د) (3 درجات) إذا كانت $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ متتالية من الأعداد الحقيقية المختلفة، فأثبت أنه إما توجد متتالية جزئية متزايدة طولها $n+1$ أو توجد متتالية جزئية متناقصة طولها $m+1$.

السؤال ٢

(أ) كل طرف $x \in X$ يساهم بالضبط $\sum_{x \in X} d(x)$ يساوي وكذلك يساهم بالضبط

في $\sum_{y \in Y} d(y)$ بواحد أيضا

$$|E| = \sum_{x \in X} d(x) = \sum_{y \in Y} d(y)$$

(ب) $D = (7,6,6,6,6,6,6,3,3,3,3,3,3)$

نبرهن باستخدام خوارزمية تجزئة

$S_1' = (5,5,5,5,5,5,5,3,3,3,3,3,3) = S_1$

$S_2' = (5,4,4,4,4,4,3,3,3,3,3,3) = S_2$

$S_3' = (3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3) = S_3$

$S_4' = (3,3,3,3,3,3,3,2,2,2) = S_4$

$S_5' = (3,3,2,2,2,2,2,2,2) = S_5$

$S_6' = (2,2,2,2,2,1,1) = S_6$

$S_7' = (2,2,1,1,1,1) = S_7$

$S_8' = (1,1,1,0) = S_8$

$S_9' = (1,0,0,1) = S_9$

$S_{10}' = (-1,0,1) = S_{10}$

~~إذا ليست بيانية~~

(ج) نفرض أنه يوجد $G = (X \cup Y, E)$ ثنائي التجزئة

وأنه يوجد ثنائي تجزئة ... التسلسل

$(7,6,6,6,6,6,6,6,3,3,3,3,3)$

ليكن $a \in X$ بحيث أن $\deg a = 7$

نلاحظ أن

$\forall x \in X \setminus \{a\}$ $\quad \deg x \equiv 0 \mod 3$

$\forall y \in Y$ $\quad \deg y \equiv 0 \mod 3$

$\deg a \equiv 1 \mod 3$

لا يكتب في
هذا الهامش

نجد أن

$$\begin{cases} \sum_{x\in X} \deg x \equiv 1 \mod 3 \\ \sum_{y\in Y} \deg y \equiv 0 \mod 3 \end{cases}$$

إذاً

$$\sum_{x\in X} \deg x \neq \sum_{y\in Y} \deg y$$

وهذا تناقض كون [illegible] في البرهان

6

السؤال الرابع

أ) باستخدام الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس. إذا $n=1$ كان [illegible] k_1 [illegible] $k\geq 2$ [illegible] T [illegible] $e(T)=n-1$ [illegible]

[illegible] $T-v$ [illegible] T [illegible] $e(T)=n-1$ [illegible] T [illegible] $T-v$ [illegible] k [illegible] $T-v$ [illegible] $k-1$ [illegible] T [illegible] k وهو المطلوب

ب) [illegible]

لتكن G [illegible] $K_1, \ldots, K_k$

ولتكن $e_1, \ldots, e_k$ عدد أضلاع $G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_k]$

[illegible] $v_1, \ldots, v_k$ [illegible] $K_1, \ldots, K_k$ [illegible] $e_i \geq v_i - 1$

إذاً

$$e = \sum_{i=1}^{k} e_i$$

$$e \geq \left(\sum_{i=1}^{k} (v_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} v_i - \sum_{i=1}^{k} 1 \right.$$

$e \geq v - k$ وهو المطلوب

لا يكتب في
هذا الهامش

(ح) $K_{m,n}$

يكون ان $K_{m,n}$ غير مستوي وغير [illegible] حيث اذا $m \geq 1$ و $n \geq 1$

~~صح~~ تكون لا محدود / دائري ~~#~~ يكون ان $K_{m,n}$ تكتك

$K_{m,n} = X \cup Y$

$|X| = m$

$|Y| = n$

$X \cap Y = \phi$

$N(x) = Y \quad \forall x \in X$

$N(y) = X \quad \forall y \in Y$

اذا

$\forall x \in X \qquad \deg x = n$

$\forall y \in Y \qquad \deg y = m$

اذا $K_{m,n}$ أويلري $\Leftrightarrow$ m,n عددين زوجيين

1/1

(د) $\bar{C}_n$ أويلري $\Leftrightarrow$ $n \geq 5$ فقط n عدد فردي

0/1

الاشكال ؟

(هـ)

السؤال 3 4.5

أ) نفرض أنه يوجد مخطط مستوي G فيه

$v=90,\ e=96,\ f=7$

أولاً

$v-e+f=k+1$ حيث k عدد مركبات G

$90-96+7=k+1$

$1=k+1$

$k=0$

وهذا تناقض لأن $k\geq 1$

إذاً لا يوجد مخطط مستوي يحقق الشروط

ب)

نكون الرسم الثنائي $H=(X,Y,E')$ حيث

$X=(x_1,\dots x_e)$ مجموعة أضلاع G

$Y=(y_1,\dots y_f)$ مجموعة الوجوه G

(f عدد الوجوه G)

نكون xy ضلعاً في H إذا كان الضلع x أحد أضلاع حدود الوجه Y

أولاً

$\sum_H d_x \leq 2$

$\sum_H d_y \geq k$

وبما أن طول أقصر دورة فيه يساوي K

$|E'|=\sum_{i=1}^{e} d_x=\sum_{i=1}^{f} d_y$

من الواضح أن

$|E'|\leq \sum_{i=1}^{e} 2=2e$

$|E'|\geq \sum^{k} k=kf$

(١)

$$kf \le \sum |\bar{F}_i| \le 2e$$

$$kf \le 2e$$

من صيغة اويلر

$$v - e + f = 2$$

بضرب في k نجد أن

$$kv - ke + kf = 2k$$

$$2k = kv - ke + kf$$

$$2k \le kv - ke + 2e$$

$$ke - 2e \le kv - 2k$$

$$(k-2)e \le (v-2)k$$

$$e \le \frac{k}{k-2}(v-2)$$

وهو المطلوب

2/2 السؤال الثاني

(أ)

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k)$$

الحل

ليكن $N = \{1,\dots,n\}$ و $N' = \{1,\dots,n,n+1\}$ لكن تجزيء N'

إلى k جزء يمكن الحصول عليها بطريقتين مختلفتين

١- تجزئ N إلى $k-1$ جزء ونضع أحد عناصر الجزء $\{n+1\}$ إلى تلك الجزئية فيكون عدد التجزيئات بهذه التجزئة هو $S(n,k-1)$ كما

٢- تجزئ N إلى k جزء ونضع جزء من أجزاء هذه التجزئة (عددها k)

ومن ثم إضافة العنصر $n+1$ إلى تلك التجزئة من حيث حاصل الضرب كما

$kS(n,k)$ ومن حيث حاصل ~~الضرب~~ أو الجمع كما

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k)$$

وهو المطلوب

لا يكتب في هذا الهامش

ب) أكيد

لتكن $U=\{1,\dots,400\}$ ولتكن $A_1=\{x\in U:3|x\}$

$A_2=\{x\in U:5|x\}$

$A_3=\{x\in U:6|x\}$

المطلوب هو

$|U-(A_1\cup A_2\cup A_3)|$

نحسب

$$S_1\left\{\begin{array}{l}|A_1|=\lfloor \frac{400}{3}\rfloor=\\ |A_2|=\lfloor \frac{400}{5}\rfloor=\\ |A_3|=\lfloor \frac{400}{6}\rfloor=\end{array}\right.$$

نحسب ... و ... [illegible] إذا

$$S_2\left\{\begin{array}{l}|A_1\cap A_2|=\lfloor \frac{400}{15}\rfloor=\\ |A_1\cap A_3|=\lfloor \frac{400}{6}\rfloor=\\ |A_2\cap A_3|=\lfloor \frac{400}{30}\rfloor=\end{array}\right.$$

$$S_3\left\{|A_1\cap A_2\cap A_3|=\lfloor \frac{400}{30}\rfloor=\right.$$

إذا نحسب

$$|U-(A_1\cup A_2\cup A_3)|=|U|-S_1+S_2-S_3$$

$$=(400)-(\quad)+(\quad)-(\quad)=$$

(ج) (أ)

لتكن الرموزات م ولتكن الأعداد الصحيحة المستخدمة هي $\{1, 2, \dots, n\}$

ويكون العدد الصحيح كذلك

$N = 8p$

إذا n زوجي

$n = 2q$

$p = q = \frac{n}{2}$

إذا n فردي

$n = 2q + 1$

$p = q + 1$

إذا

$\frac{n}{2} = q + \frac{1}{2}$

$\left[\frac{n}{2}\right] = q + 1 = p$

وهو المطلوب

(ثانيا)

$N = \binom{n}{3} \mid \gamma_{n-3}$ $\boxed{\text{حيث } n \geq 6}$

وهو المطلوب

8,75

السؤال الثاني

نلاحظ أنه $x_3 > 6$ تكافئ $x_3 \geq 7$

$x_4 > 7$ تكافئ $x_4 \geq 8$

نضع

$y_1 = x_1 - 3 \geq 0 \Leftarrow x_1 \geq 3$

$y_2 = x_2 + 2 \geq 0 \Leftarrow x_2 \geq -2$

$y_3 = x_3 - 7 \geq 0 \Leftarrow x_3 \geq 7$

$y_4 = x_4 - 8 \geq 0 \Leftarrow x_4 \geq 8$

نعوض في $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ نحصل على

$(y_1 + 3) + (y_2 - 2) + (y_3 + 7) + (y_4 + 8) = 19$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 3 - 2 + 7 + 8 = 19$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 16 = 19$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 19 - 16 = 3$

اذا الحلول الصحيحة الغير سالبة للمعادلة هي

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 3$$

$$N = \binom{4-1+3}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{\cancel{6\times5\times4\times3!}}{\cancel{3!\,3!}} =$$

ب

$$x_1 \in \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$$

$$x_2 \in \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$$

$$x_3 \in \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$$

$$x_4 \in \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

$$x_5 \in \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

اذا الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة الغير سالبة هي

$$f(x) = (x + x^3 + x^5 + \cdots)^3 (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)^2$$

$$f(x) = (x(1 + x^2 + x^4 + \cdots))^3 (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)^2$$

$$f(x) = x^3 (1 + x^2 + x^4 + \cdots)^3 (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)^2$$

$$f(x) = x^3 \cancel{(1 + x^2 + x^4)} (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)^5$$

نفرض

$$\cancel{y = x^3}$$

$$\cancel{y^2 = x^6}$$

$$\cancel{y^3 = x^9}$$

$$\cancel{y^4 = x}$$

نفرض

$$y = x^2$$

$$y^2 = x^4$$

$$y^3 = x^6$$

[illegible]

$$= x^3 (1 + y + y^2 + y^3 + \cdots)^5$$

$$= x^3 (1 - y)^{-5}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^3}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x^2)^3}$$

ج) $\binom{n+m}{2} = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + nm$

الحل

نأخذ الصندوق به $n+m$ كرة

(n كرة حمراء و m كرة سوداء)

وليكن N هو طرق اختيار كرتين من الصندوق

الطريقة الأولى

(1) ~~بطرق~~ $N = \binom{n+m}{2}$ لأن الصندوق يحوي $n+m$ عنصرا

الطريقة الثانية

أ- اختيار كرتين من اللون الأحمر $\binom{n}{2}$

ب- اختيار كرتين من اللون الأسود $\binom{m}{2}$

ج- كرة حمراء وكرة سوداء $\binom{n}{1}\binom{m}{1}$

من مبدأ المجموع نجد أن

$$N = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + \binom{m}{1}\binom{n}{1}$$

$$N = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + mn$$

وهو المطلوب

لا يكتب في
هذا الهامش

د)

البرهان

نفرض أن a_i [illegible] متتالية [illegible] $\geq mn+1$

[illegible] $\geq n+1$ [illegible]

إذا $1 \leq i \leq n$ ، [illegible] $mn+1$ [illegible]

[illegible] $\left(\frac{m}{n}\right)+1$ [illegible]

إذاً

$$\left(\frac{mn+1}{n}\right)+1 = m+1$$

إذا [illegible]

[illegible] إذا كان [illegible]

ونريد أن [illegible] $a_{i_j} \le a_{i_{j+1}}$ [illegible]

إذا [illegible]

t_j+1

$+1$ [illegible]

[illegible]