جامعة الملك سعود	الاختبار النهائي	الفصل الأول 1436/1435هـ
كلية العلوم- قسم الرياضيات	في المقرر 431 ريض	الزمن: ثلاث ساعات

ملحوظة: كل الرسوم المدروسة هنا هي رسوم بسيطة.

السؤال الأول : (11 درجة)

(1) **(أ)** أثبت أن الشجرة التي عدد رؤوسها $n \geq 2$ يوجد فيها على الأقل رأسان درجة كل منهما تساوي 1 . (درجتان)

(ب) إذا كان G رسما بحيث $\delta(G) \geq k$ ، حيث k عدد صحيح موجب، فأثبت أن G يحتوي على ممر طوله على الأقل k . (درجتان)

(ج) جد جميع الأشجار،غير المتماثلة، التي هي رسوم منتظمة. (درجة واحدة)

(2) ليكن G رسما منتظما من النوع 3، و ليكن $P=(v_1,v_2,...,v_p)$ ممرا ذا طول أعظم في الرسم G .

(أ) أثبت أن $p \geq 4$. (درجة واحدة)

(ب) أثبت أنه يوجد i,j بحيث $3 \leq i < j \leq p$ و الرأس v_1 يجاور كلا من الرأسين v_i و v_j . (درجة واحدة)

(ج) استنتج أن الرسم G يحتوي على دورة طولها زوجي. (درجة واحدة)

(3) ينظم قسم الرياضيات الاختبارات النهائية لسبعة مقررات مرقمة من 1 إلى 7 .
لكل زوج من الأزواج التالية فقط يوجد على الأقل طالب مسجل في المقررين:

$$\{1,2\},\ \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{3,6\}, \{5,7\}, \{5,6\}.$$

أنشيء جدولا لهاته الاختبارات بأقل عدد ممكن من الفترات. (3 درجات)

السؤال الثاني : (11 درجة)

(1) جد جميع قيم m بحيث:

(أ) يكون الرسم $K_{m,m}$ هاملتونيا. (درجة واحدة)

(ب) يكون الرسم $K_{m,m}$ أويلريا. (درجة واحدة)

(ج) يكون الرسم $K_{m,m}$ مستويا. (درجة واحدة)

(د) يكون الرسم $K_{m,m}$ شجرة. (درجة واحدة)

(2) **(أ)** إذا كان G رسما منتظما من النوع m، حيث $m \geq 1$، و عدد رؤوسه n بحيث $n \geq 2m+2$ ، فأثبت أن الرسم $\overline{G}$ هو رسم هاملتوني. (درجتان)

(ب) استنتج أن الرسم $\overline{C_n}$ هاملتوني لكل $n \geq 6$. (درجة واحدة)

(3) ليكن G رسما عدد رؤوسه v .

(أ) إذا كان $v \leq 6$ فأثبت أن G أو $\overline{G}$ مستو. (درجتان)

(ب) إذا كان $v \geq 11$ فأثبت أن G أو $\overline{G}$ غير مستو. (درجتان)

السؤال الثالث : (8 درجات)

(1) (3 درجات) ليكن n عددا صحيحا موجبا . أثبت أن عدد التباديل التامة للمجموعة $\{1,2,...,n\}$ هو

$$d_n = n!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-...+(-1)^n\frac{1}{n!})$$

(2) (أ) (درجة واحدة) جد معامل $x^5y^3z^5w^3$ في مفكوك $(x+y+z+w)^{16}$.

(ب) (درجة واحدة) ليكن n عددا صحيحا موجبا . بكم طريقة يمكن تجزئة $4n$ عنصرا مختلفا إلى n مجموعة تتكون كل منها من أربعة عناصر ؟

(ج) (درجة واحدة) أوجد عدد التباديل f للمجموعة $\{1,2,...,n\}$ بحيث $f(\{1,2\})=\{3,4\}$ و f تترك بالضبط عنصرين اثنين في موضعيهما الطبيعيين .

(د) (درجة واحدة) أوجد عدد المتتاليات (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) بحيث $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$ و $x_i \in \{1,2,3\}$ لكل $i \in \{1,2,3,4,5\}$.

(ه) (درجة واحدة) أوجد عدد عناصر المجموعة $\{(A,B):\varnothing \ne A \subseteq B \subseteq \{1,2,...,n\}\}$.

السؤال الرابع : (10 درجات)

(1) (أ) (درجتان) جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة: $x_1+x_2+x_3=16$ بحيث: $x_3>5$, $x_2 \ge -2$, $x_1 \ge 4$

(ب) (درجتان) جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة: $x_1+x_2+x_3=16$ بحيث: $0 \le x_3 \le 4$ ، $0 \le x_2 \le 9$ ، $0 \le x_1 \le 8$

(2) (درجتان) باستخدام دالة مولدة أسية، أو جد عدد المتتاليات من الطول r ، المأخوذة من المجموعة $\{1,2,3,4\}$ و التي يظهر فيها كل من 1 و 2 مرة واحدة على الأقل .

(3) (أ) (درجتان) أو جد صيغة مختصرة للدالة المولدة العادية للمتتالية (a_n) حيث $a_n=n^2 2^n$ لكل $n \ge 0$.

(ب) (درجتان) استنتج صيغة مختصرة للمجموع $1^2 2^1+2^2 2^2+3^2 2^3+...+n^2 2^n$ (أي $\sum_{k=0}^{k=n} k^2 2^k$) .

(إرشاد: استخدم ما يلي: $\frac{4x^2+2x}{(1-x)(1-2x)^3}=\frac{-6}{1-x}+\frac{12}{1-2x}-\frac{10}{(1-2x)^2}+\frac{4}{(1-2x)^3}$)

السؤال الأول

أ : ١ : P : لنأخذ ممرا ذا طول أكبر : $P = v_1 v_2 \cdots v_n$

لاحظ أن $v_1 \neq v_n$ لأن الشجرة لا تحوي على دورات (مفهوم لأنه ممر !)

أيضا لو كان $\deg(v_1) > 1$ أو $\deg(v_n) > 1$ لحصلنا على

$P_1 = v_r v_1 \cdots v_n$ أو $P_2 = v_1 v_2 \cdots v_n v_t$ لـ

ممر أطول وهو تناقض مع الاختيار ذا الطول الأكبر أو أن حصلنا على المالم الموصولة

ولكن أو v_1 و v_n متصل بضلع إلى v_i حيث $v_i \in P$ لحصلنا على دورة والشجرة لا تحوي على دورات

∴ $\deg(v_1) = \deg(v_n) = 1$ ومنه نجد الرأسين المطلوبين □

ب : ١ : ب : لنفرض جدلا أن الرسم لا يحوي على ممر طول K أي لكل ممر

P يكون طول P أصغر من أو يساوي $K-1$ ، لنأخذ ممرا ذا طول أكبر P_1

$P_1 = v_1 v_2 \cdots v_j$ ، $j \leq K-1$

لاحظ طرفي (P) v_1 و v_j لا يمكن أن يرتبطا بضلع برأس خارج الممر لأنه لو حصل كذلك لحصلنا على تناقض مع طريقة اختيار (P)

لكن $\deg(v_i) \geq K$ لكل $1 \leq i \leq j$ أي أن v_1 ~~مرتبط يجب أن~~

$A = \{v_1 v_i \ ; \ 1 \neq i\} \subseteq E$ يجاور

أي أنه يجب على v_1 أن يرتبط بكل رؤوس الممر لكن طول الممر أصغر من K فلم يرتبط برأس من الممر على الأقل من الممر أكثر من مرة ، والرسم الرسم بسيط

تناقض . إذا لا بد من وجود ممر ذا طول K على الأقل

ب : ١ : ج : لدينا P_1 و P_2 ‏ ! نجمع تكرار غير صحيح كلتيهما

مستلزمتان من السؤالين أ و ب على التوالي

الآن لتكن T شجرة فيها عدد رؤوسها أكبر من أو يساوي ٣ أي $n \geq 3$

من فقرة (P_1) لدينا رأسان على الأقل درجة كل منهما واحد

و T رسم متصل ⇐ لأن $v \in V(T)$ يكون $\deg(v) = 1$

لا يكتب في هذا الهامش

لكن المشكلة هو أن الشجرة عدد أضلاعها هو $n-1$ حيث n عدد الرؤوس

نحصل على: من مبرهنة سابقة $\sum_{v\in V} deg(v) = 2|E|$

$\sum_{v\in V} deg(v) = 2(n-1) = 2n \Rightarrow 0 = 2$

تناقض أي لا يوجد رأس ... عدد رؤوسها أكبر من أو يساوي 3

الأشجار الطولية هي: P_1, P_2 أو $\{\circ\}$ $\{$ $\}$

2: ~~...~~

الحل: ... أن $P \le 3$ أي أن المسارات الثلاثة $P_1 \subseteq v_1 v_2 v_3$ أو $P_2 = v_1 v_2$ لأنه ... الطول الأعظمي

~~...~~ $deg(v_1)=3$ أي ... ولكن $v_i \notin \{v_1, v_2, v_3\}$

$v_1 v_i \notin E(G)$ لأنه تناقض مع كون المسار ذا طول أعظمي ومنه $v_1 v_2, v_2 v_3 \in E(G)$

أي يتبقى لدينا درجة $deg(v_1) \Rightarrow$ المسار غير بسيط تناقض * (لأن لا يوجد مكان آخر في العمر)

~~...~~ بالمثل عندما نفرض أن المسار ذا الطول الأعظمي هو $v_1 v_2$

المسار ذا الطول الأعظمي طوله على الأقل 4 $\square$

(يستخدم ... المسار)

حيث: الآن بما أن $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ مسار ذا طول أعظمي فإنه

عند ... ذا طول أعظمي ... على الأطراف لدينا v_1 إذا ارتبط

برأس آخر يجب أن يكون من العمر ... للكامل:

الحالة الأولى: $v_1 v_2 \in E(G)$ ومن تعريف العمر $v_1 v_3$ ~~...~~ $\in E(G)$ أي أنه ... واحدة

لدينا درجة ... $deg(v)$ ... أي على الأقل ... يجب أن يرتبط برأس من

العمر أي أن الخيارات المتبقية هي v_i حيث $3 < i \le P$

وتكون هنا $j = 3$ ~~...~~

لا يكتب في هذا الهامش

1

الحالة الثانية: $v_1v_3 \notin E(G)$: ~~بنفس~~ بتحليل طريقة الحالة الأولى نجد أنه يتحقق لنا في 2 $\deg(v_1)$ لذا $v_1v_i \in E(G)$ ، v_1v_j حيث $i \neq j$ ومن الممكن ترتيب الأعداد نحصل على المطلوب $3 \leq i < j \leq p$

∴ في كلا الحالتين ~~البرهان~~ المطلوب ~~تحقق~~

2 ج: من الفقرة (ب) ~~(أ)~~ يوجد رأسان v_i و v_j حيث v_i و v_j يجاوران v_1

إذا $i = 2k$ أو $j = 2m$ فإن الدورة $v_1 v_2 \ldots v_{i=2k} v_1$ أو $v_1 v_2 \ldots v_{i=2m} v_1$

دورة زوجية طولها $2m$ أو $2k$

إذا كان i و j كلاهما ~~هم~~ فرديان فإن الدورة التالية زوجية

أي أن $i = 2m+1$

$j = 2k+1$

$v_i v_{i+1} \ldots v_j v_1 v_i$

~~لأن طولها~~ ~~$j - i = (2k+1) - (2m+1) = 2(k-m)$~~

لأن طولها ~~$(j - i + 1) + 1$~~ $= j - i + 2 = (2k+1) - (2m+1) + 2$

$= 2(k - m + 1)$

لإثبات العلاقة الأخيرة صح

v_1 ---- v_i --- v_j

$v_i = v'_1 \ldots v'_{j-i+1}$

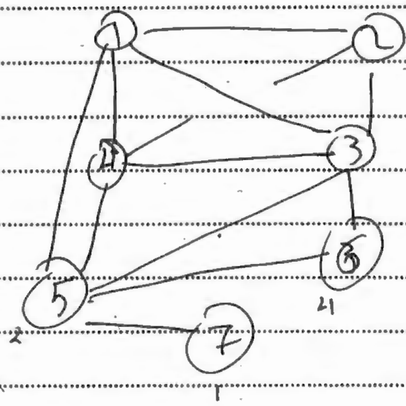
$v'_{j-i+1} = v_j$

$v'_{j-i+2} = v_1$

1 أو $v_1v_2 \in E(G)$

لا يكتب في هذا الهامش

س3: لنسمي الرؤوس ونحاول تلوينه بالألوان



الرسم المحدث $G(\{1,2,3,4\}) \cong K_4$

$\therefore \chi(G) \geq 4$ --- (1)

وحيث $\Delta(G)=5$ والرسم ~~ليس دوري~~ ليس تاما

حسب مبرهنة بروكس لدينا $\chi(G) \leq 5$

~~الطريقة~~

وأيضا نلون الرأس (1) باللون $\underline{1}$

اللون	الرأس
1	1
2	2
3	3
4	4
2	5
4	6
1	7

وهذا تلوين للرسم بأربعة ألوان $\therefore \chi(G) \leq 4$ ومن (1) نحصل على

$\chi(G) = 4$

لنرجع على حل المسألة جدول الفترات باستخدام الرسم الجدول هو:

الفترة / الاختبار	{1,7}	{2,5}	{3}	{4,6}
1	X			
2		X		
3			X	
4				X

~~السؤال الثاني~~

2) أ: نستفيد من الكم الخاصية التالية للرسم $K_{m,m}$ إذا كان X و Y
تجزيء للرسم بحيث أن $x \in X$ و $y \in Y$ فإن $xy \in E$

~~(P) ... $x,y \in V(K_{m,m})$ ... $\deg(x) = \deg(y) = m$~~

~~(P) لكل m من ... دورة هاملتونية~~

حيث $m \geq 2$

X $[x_1, x_2, x_3, \dots, x_m]$

$K_{m,m} =$

$[y_1, y_2, \dots, y_m]$

الدورة التالية دورة هاملتونية

$P_2 = x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_m y_m x_1$

∴ لكل $m \geq 2$ $K_{m,m}$ هاملتوني. عندما $m=1$ لا يمكن أن يكون هاملتوني لوجود رأس من الدرجة 1

(ب) يكون الرسم أويلري $\Leftrightarrow$ لكل $x \in V$ فإن $\deg(x) = 2k$

وحيث أن لكل $x \in V(K_{m,m})$ $\deg(x) = m$ فإن الرسم أويلري إذا كان $m = 2n$

(ج) إذا كان $1 \le m \le 2$ لأنه لو كان أكبر من ذلك لكان $K_{3,3} \subset K_{m,m}$
ومنه بر هنة كوراتسكي فإن الرسم غير مستو

كان عليك التحصيل أيضا

(د) يكون $K_{m,m}$ شجرة إذا كان يحتوي دورة لا يكون شجرة

إذا كان $m=1$ لأنه لو كان $m \geq 2$ ~~لكان~~

X $[x_1, x_2, \dots]$

$[y_1, y_2, \dots]$

كحصلنا على الدورة التالية

$C = x_1 y_1 x_2 y_2 x_1 \cong C_4$

لا يكتب في هذا الهامش

ج 2 : أ : علم أن G منتظم فإن $\bar{G}$ منتظم من النوع m

فإذا وحسب $\bar{x} \in V(\bar{G})$ يكون :

$deg(\bar{x}) = (n-1) - m$

ليكن x و y رأسان من G :

$deg(x) + deg(y) = (n-1) - m + (n-1) - m$

$= \cancel{(n-1)} \cancel{- 2m +} \cancel{(n-1)}\ n - (2m+2) + n \geq n$ من المعطى

وحيث أن $n - 2(2m+2) \geq 0$ من المعطى في السؤال

$deg(x) + deg(y) \geq n$

∴ من مبرهنة سابقة يكون $\bar{G}$ هاملتوني

أو لكل $xy \notin E(\bar{G})$ فإن x و y غير متجاورين في G لأنه ... متجاوران ... هاملتوني ... من نظرية سابقة

$\bar{G}$ هاملتوني $\Leftarrow$ إذاً $\bar{G}$ هاملتوني □

ج 2 : ب : علم أن $\bar{C}_n$ منتظم من النوع 2

~~$deg(x) + deg(y) \geq (n-1) - 2 + (n-1) - 2$~~

وحيث أن $n \geq 6 \geq 2m+2 = 6$ تحقق شرط الفقرة أ

$m = 2$ نحصل على أن $\bar{C}_n$ هاملتوني من الفقرة (أ)

ج 2 : 3 :

~~لنثبت أن G أو $\bar{G}$ ليسا مستويان~~

إذا كان $v \leq 4$ فإن G و $\bar{G}$ كلاهما مستويان

لأنهما لا يمكن أن يحويا $K_{3,3}$ أو K_5 قسم لـ

عند $5 \leq v \leq 6$: لنفرض أن G غير مستوي أي أنه يحوي

على قسم من $K_{3,3}$ أو K_5 ومنه $|E(G)| \geq 9$

[redacted]

~~نفرض أن G و $\bar{G}$ غير مستوي~~ أن :

$|E(G)| + |E(\bar{G})| = \frac{v(v-1)}{2}$ $\left\{ \frac{v(v-1)}{2} \right)$

$\Rightarrow |E(\bar{G})| = \frac{v(v-1)}{2} - |E(G)|$

$\boxed{|E(G)| \geq 9}$ لأن عندما $v=5$

$= \frac{5(5-1)}{2} - |E(G)| \leq 10 - 9 = 1$

أي أن $|E(\bar{G})| = 1$ إذا لا يمكن أن يحتوي على نسخة من $K_{3,3}$ أو K_5 ⇐ $\bar{G}$ مستوٍ

عند $v=6$

$|E(\bar{G})| = \frac{6(5)}{2} - |E(G)|$
$\leq 15 - 9 = 6$

وبالمثل لأن $|E(\bar{G})| \leq 6$ لا يمكن أن يحتوي على نسخة من $K_{3,3}$ أو K_5

∴ $\bar{G}$ مستوٍ لأن $6 < |E(K_{3,3})|$
$6 < |E(K_5)|$

لكن نفرض أن G و $\bar{G}$ كلاهما مستويان

$\Rightarrow |E(G)| \leq 3|V|-6$, $|E(\bar{G})| \leq 3v-6$

$\Rightarrow |E(G)+E(\bar{G})| = \frac{v(v-1)}{2} \leq 6v-12$

$\Rightarrow v^2 - v - 12v \leq -24$

$\Rightarrow v^2-13v+24 \leq 0$ ؟!!

$\sqrt{(4)(24)-13^2} = \sqrt{96-169} \leq 0$ ~~$\sqrt{4 \cdot 24 - 13^2}$~~ وهي معادلة مميزها

أي لا يوجد لها حلول حقيقية

وتكون إشارتها دائماً موجبة $v^2-13v+24$

$+ \; ++++ \; +$

تكون قيمها

هذا الحل يا أحمد !!!

أنت مسؤول على عدم معرفة حل المعادلة من الدرجة الثانية

[redacted]

لا يكتب في
هذا الهامش

دائماً موجبة ~~لكل~~ (من التعريف ب $x=0$)

أي أنه ~~لأي~~ مجموعة الحل الحتمية خالية

∴ لا يمكن أن يكونا G و $\bar{G}$ كلاهما مستويان ومن أحدهما غير مستوٍ

السؤال الثالث

ح) أ) لتكن A هي مجموعة كل تباديل $\{1, 2, \dots, n\}$

ولتكن A_i هي مجموعة التباديل التي تثبت i أي أن

$$A_1 = \{\sigma \in S_n ; \sigma(1) = 1\}$$

$$A_i = \{\sigma \in S_n ; \sigma(i) = i\}$$

$\vdots$

$$A_n = \{\sigma \in S_n ; \sigma(n) = n\}$$

لدينا

$1\ 2\ 3 \dots i\ i+1 \dots n$

$1\ 2\ 3 \dots i\ i+1 \dots n$

$$|A| = n!\ ,\quad |A_i| = (n-1)!$$

$1\ 2 \dots i \dots j \dots n$

$1\ 2 \dots i \dots j \dots n$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$$

$\vdots$

r هنا عدد المجموعات $|A_i \cap A_j \cap \dots \cap A_r| = (n-r)!$ من A_i

∴ المجموعات التي تثبت K عنصر هي $\binom{n}{k}$ ~~[بكم طريقة نختار K من]~~

من مبدأ التضمين والإقصاء التباديل التي لا تثبت أي عنصر هي:

$$|A| - \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + (-1)^n \alpha_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!$$

$$\alpha_i = \sum \underbrace{|A_r \cap A_t \cap \dots \cap A_m|}_{i \text{ مجموعة}}$$

$$= n! - \frac{n!}{1!(n-1)!}(n-1)! + \dots + \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}(n-k)! + \dots$$

$$= n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{(-1)^k}{k!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

لا يكتب في هذا الهامش

س3 ; 2 ; P ; متعددة الحدود معامل $x^5y^3z^5w^3$ هو:

$$\binom{16}{5,3,5,3} = \frac{16!}{(5!)^2(3!)^2} = \frac{(16)(15)(14)\cdots(6)}{(5!)\,(3\times 2)^2}$$

$$= \frac{(16)(15)\cdots(7)}{(5!)(6)} = \frac{(16)(15)(14)(13)(12)(11)\cdots(7)}{(5)(4)(3)(2)}$$

$$= (4)(14)(13)$$

[هنا فقرة سقطت سهواً انظر للصفحة 3]

س3 ; 2 ; ج : نختار شخصين بـ $\binom{n-2}{2}$ ① طريقة ونبدل البقية بـ d_{n-4} طريقة

مستعيناً بمبدأ العد:

$$N = \binom{n-2}{2} d_{n-4}$$

س3 ; 2 ; د : نلاحظ أنه

$y_5 = x_5 - x_4 \geq 0$

$y_4 = x_4 - x_3 \geq 0$

$y_3 = x_3 - x_2 \geq 0$

$y_2 = x_2 - x_1 \geq 0$,

$y_1 = x_1 - 1 \geq 0$, $i \in \{1,2,3\}$

[طريقة أسرع بإضافة متباينة $x_6 = 3 - x_5 \geq 0$ وتحويلها لحل النظام
$y_1 + y_2 + \dots + y_6 = 2$
عدد حلوله $\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2}$]

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = x_5 - 1 \geq 0$$

ولأن $x_5 \in \{1,2,3\}$ باستبدال

فإنه لدينا النظام التالي

$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_5 = 2$ — (P)

$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_5 = 1$ — (ب)

$y_1 + y_2 + \dots + y_5 = 0$ — (ج)

① لأن هناك لاعبان لا يعيدان لعزله مشتركة آخرين من المعطى

لا يكتب في
هذا الهامش

عدد حلول النظام P هو: $\binom{5-1+2}{2} = \binom{6}{2} = \cancel{(6)(5)(3)(4)}$

" " " (ب) هو: $\binom{5-1+1}{1} = 5$

" " " (ج) هو: $\binom{5-0+0}{0} = 1$

وحيث أن الأنظمة مستقلة من مبدأ جاصل الجمع يكون عدد الحلول هو:

$N = \binom{6}{2} + 5 + 1$

~~طريقة~~

طريقة أخرى كما شرحها الأستاذ ~~الاستاذ~~ $Y_6 = 3 - x_5 \geq 0$ Y_6

وجمعناها مع التي قبل لحصلنا على النظام

$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_6 = 2$

وعدد حلوله هي

$N = \binom{6-1+2}{2} = \binom{7}{2} = \cancel{(7)(6)}$

3/

لا يكتب في
هذا الهامش

س ٤: هـ: نختار B بحجم

لنفرض أننا اخترنا حجم B هو ليكن K فبإمكاننا اختيار B بـ $\binom{n}{k}$

طريقة ونختار A الآن بـ 2^k [لأن عدد المجموعات الجزئية من مجموعة ما T

هو $2^{|T|}$ لأن في كل عنصر لدينا حالتان إما نختاره أو لا نختاره وكلها مستقلة نحصل على المطلوب]

ف: عدد الطرق هو:
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k}1^{n-k}=(1+2)^{n}=3^{n}$$

لماذا نسيت الشرط: $A\neq\phi$ ؟؟؟

هذا السؤال سهل جداً !

س ٥: ٢:
$$\frac{1}{n!}\binom{4n}{\underbrace{4,4,\dots,4}_{n}}=\frac{1}{n!}\binom{4n}{4}\binom{4n-4}{4}\cdots\binom{4}{4}$$

السؤال الرابع

لا يكتب في هذا الهامش

10

4: أولاً: نستخدم التعويض $y_1=x_1-4\ge 0$, $y_2=x_2+2\ge 0$, $\cancel{y_3=x_3-5\ge 0}$

نعيد كتابة النظام لنحصل على:

$y_1+y_2+y_3 \cancel{+x-4-5} = 16-4+2-5 = 9$

ومنه عدد حلول النظام هي: $\binom{3-1+9}{9} = \binom{11}{9} = \frac{(11)(10)}{2} = 55$

4 (ب): باستخدام مبدأ التضمين والإقصاء ونحل لكل نظام $x_1+x_2+x_3=16$

أولاً: عدد حلول النظام $x_1+x_2+x_3=16$ حيث $0\le x_1$, $0\le x_2$, $0\le x_3$ هي: $\binom{3-1+16}{16}=\binom{18}{16}$

ثانياً: للتبسيط A_1 هي مجموعة حلول النظام حيث $9\le x_1$

A_2 " " " " " " $10\le x_2$

A_3 " " " " " " $5\le x_3$

من مبدأ التضمين والإقصاء عدد حلول النظام حيث $0\le x_1\le 9$, $0\le x_2\le 9$, $0\le x_3\le 4$ هي

$N = |A| - (|A_1|+|A_2|+|A_3|) + \cancel{|A_1\cap A_2|} \sum_{i\ne j}|A_i\cap A_j| - |A_1\cap A_2\cap A_3|$

$|A_1| = \binom{3-1+7}{7} = \binom{9}{7}$ لنحسب (بنفس طريقة في P)

$|A_2| = \binom{3-1+6}{6} = \binom{8}{6}$, $|A_3| = \binom{3-1+11}{11} = \binom{13}{11}$

~~$|A_1\cap A_2| = 0$~~ $\cancel{y_1+y_2+y_3=-3}$ لأنه بعد التعويض بـ $y_1=x_1-9$, $y_2=x_2-10$ نحصل على وهذا غير ممكن

$\therefore |A_1\cap A_2| = 0$

لاحظ أن: $|A_2\cap A_3| = \binom{3-1+1}{1} = \binom{3}{1} = 3$

لأنه عند التعويض x_2 و x_3 نحصل على النظام $x_1+y_2+y_3=1$

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{3-1+2}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{4} = 6$$

وأيضاً

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

لأن $\{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \subseteq A_1 \cap A_2 = \phi$

أي أن عدد الحلول هو:

$$n = \binom{18}{16} - \binom{9}{7} - \binom{8}{6} - \binom{13}{11} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2} - 0$$

س 4: 2: الدالة المولدة الأسية هي:

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^2}_{\{1,2\}} \underbrace{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)^2}_{\{3,4\}}$$

$$= (e^x - 1)^2 e^{2x} = e^{2x}\left[e^{2x} - 2e^x + 1\right] = e^{4x} - 2e^{3x} + e^{2x}$$

ويكون الحد العام a_n هو:

$$a_n = \left[\frac{4^n - 2(3)^n + 2^n}{n!}\right]$$

أي أن عدد المتتاليات من الطول r هو:

$$r!\, a_r = 4^r - 2(3)^r + 2^r$$

س 4: 3: د: أولاً الدالة المولدة لـ 2^n هي $\sum (2x)^n = f_1(x) = \frac{1}{1-2x}$

الدالة المولدة لـ $n2^n$ هي:

$$x f_1'(x) = \frac{2x}{(1-2x)^2} = f_2(x)$$

الدالة المولدة لـ $n^2 2^n$ هو: باستخدام مفاضلة ضرب دالتين

$$x f_2'(x) = x\left[\frac{2}{(1-2x)^2} + \frac{(2x)(-2)(-2)}{(1-2x)^3}\right]$$

$$= 2x\left[\frac{1-2x+4x}{(1-2x)^3}\right] = \frac{2x(1+2x)}{(1-2x)^3} = \frac{2x+4x^2}{(1-2x)^3} = \cancel{g(x)}\ f_3(x)$$

لا يكتب في
هذا الهامش

ج 3: من الدالة المولدة لـ $(1^2 2^1)+(2^2 2^2)+\dots+n^2 2^n$ هي:

$$-f_3(x)\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad , \quad f_3(x)=\sum 2^n n^2 x^n$$

ومن قسمة ... نجد أن

$$g(x)=f_3(x)\,\frac{1}{1-x}=\frac{2x+4x^2}{(1-3x)^3(1-x)}$$

ومن الكسور الجزئية:

$$=\frac{-6}{1-x}+\frac{12}{1-2x}+\frac{-10}{(1-2x)^2}+\frac{4}{(1-2x)^3}$$

$$=-6\sum_{n=0}^{\infty}x^n+12\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n+\frac{-10}{(1-2x)^2}+\frac{4}{(1-2x)^3}$$

$$(1-2x)^{-2}=\left(\sum 2^n x^n\right)^2=\sum\binom{2-1+n}{n}2^n x^n=\sum(n+1)2^n x^n$$

$$(1+2x+4x^2+\dots)(1+2x+4x^2+\dots)$$

$$\binom{1+n}{n}=\frac{(n+1)!}{n!\,1!}=(n+1)$$

$$(1-2x)^{-3}=\sum\binom{3-1+n}{n}2^n x^n=\sum_{n=0}\frac{(n+2)(n+1)}{2}2^n x^n$$

$$\binom{2+n}{n}=\frac{(n+2)!}{n!\,2!}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}-6x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(12)2^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-10)(n+1)2^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4)(n+2)(n+1)2^n x^n}{2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left[-6+(12)2^n-10(n+1)2^n+(2)(n+1)(n+2)2^n\right]$$

أي أن المجموع:

$$(1^2)(2^1)+\dots+2^n n^2=-6+(12)2^n-10(n+1)2^n+(2)(n+1)(n+2)$$