جامعة الملك سعود	**الاختبار النهائي**	**الفصل الأول 1437/1436هـ**
كلية العلوم– قسم الرياضيات	**في المقرر 431 ريض**	**الزمن: ثلاث ساعات**

ملحوظة: كل الرسوم المدروسة هنا هي رسوم بسيطة.

السؤال الأول : (13 درجة)

(1) (درجتان) أثبت أن المتتالية $D=(4,4,4,4,4,3,3,2,2)$ رسمية .

(2) **(أ)** (درجتان) أثبت أن الشجرة التي عدد رؤوسها $n\geq 2$ يوجد فيها على الأقل رأسان درجة كل منهما تساوي 1 .

(ب) (درجة واحدة) استنتج أنه إذا كان G رسما مترابطا، عدد رؤوسه $n\geq 2$ ، فإنه يوجد فيه على الأقل رأسان كل منهما ليس مفصلا .

(3) (درجة واحدة) ليكن G رسما مترابطا، عدد رؤوسه $n\geq 2$. أثبت أنه يوجد رسم أويلري H، عدد رؤوسه يساوي n أو $n+1$، بحيث يكون الرسم G رسما جزئيا محدثا من الرسم H .

(4) **(أ)** (درجة واحدة) أثبت أن الرسم $\overline{C_n}$ *هاملتوني ، لكل عدد صحيح* $n\geq 5$.

(ب) (5 درجات) جد جميع قيم العدد الصحيح الموجب n، في كل من الحالات التالية:

(i) يكون الرسم $K_{n,n}$ هاملتونيا. **(ii)** يكون الرسم $K_{n,2n}$ أويلريا.

(iii) يكون الرسم $\overline{C_n}$ *أويلريا*. **(iv)** يكون المضموم $K_n+\overline{K_{n+1}}$ رسما هاملتونيا.

(v) يوجد رسم G ، عدد رؤوسه n، بحيث يكون كل من G و $\overline{G}$ رسما أويلريا غير صفري.

(5) (درجة واحدة) لتكن A مجموعة من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث $1\in A$. أثبت أنه توجد شجرة T بحيث $A=\{d_T(v): v\in V(T)\}$

السؤال الثاني : (9 درجات)

(1) **(أ)** (3 درجات) إذا كان G رسما مستويا مترابطا، عدد رؤوسه v و عدد أضلاعه e ، و طول أقصر دورة فيه يساوي 5 ، فأثبت أن $e\leq \frac{5}{3}(v-2)$.

(ب) (درجة واحدة) استنتج أن رسم بيترسن غير مستو.

(2) (درجة واحدة) أثبت أن $k^6-3k^5+2k^4-2k^3+2k^2$ ليست كثيرة حدود لونية.

(3) **(أ)** (درجة واحدة) أثبت أنه إذا كان $G=(V,E)$ رسما مستويا، فإن $\delta(G)\leq 5$.

(ب) (3 درجات) أثبت أنه إذا كان $G=(V,E)$ رسما مستويا ، فإن $\chi(G)\leq 5$.

السؤال الثالث : (9 درجات)

(1) (3 درجات) أثبت أن عدد التطبيقات الشاملة من المجموعة $A=\{a_1,a_2,....,a_m\}$ إلى المجموعة $B=\{b_1,b_2,....,b_n\}$، حيث $m\geq n$، يساوي:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$$

(2) **(أ)** (درجتان) جد عدد الأعداد الصحيحة x بحيث : $1 \le x \le 350$ ، 4 لا يقسم x ،
6 لا يقسم x ، 9 لا يقسم x .

(ب) (درجة واحدة) جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21$ إذا كان
$x_1 \ge -2$ ، $x_2 > 3$ ، $x_3 \ge 3$ ، $x_4 \ge 5$

(3) (3 درجات) لتكن المجموعة $A = \{1, 2, ..., n\}$ ، حيث $n \ge 6$ عدد صحيح **.**
(أ) جد عدد التباديل f للمجموعة A ، التي تترك بالضبط *ثلاثة أعداد* في أماكنها الطبيعية
وتحقق $f(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$.
(ب) جد عدد العلاقات الانعكاسية و التناظرية التي يمكن تعريفها على المجموعة A .
(ج) جد عدد العلاقات التخالفية R ، التي يمكن تعريفها على المجموعة A ، بحيث $\{(1,1), (1,2), (1,n)\} \subseteq R$.

السؤال الرابع: (9 درجات)

(1) لكل عدد صحيح $n \ge 1$ ، ليكن a_n هو عدد طرق اختيار ثلاثة أعداد مختلفة و غير متعاقبة
من بين الأعداد $1, 2, ..., n$.
(أ) (درجة و نصف) أوجد صيغة مختصرة للدالة المولدة العادية للمتتالية (a_n) .
(ب) (درجة واحدة) استنتج قيمة a_n ، لكل $n \ge 1$.

(2) (درجة و نصف) باستخدام دالة مولدة أسية، أو جد عدد المتتاليات من الطول r ، المأخوذة من المجموعة
$\{a, b, c, d, e, f\}$ و التي يظهر فيها كل من b و d مرة واحدة على الأقل .

(3) **(أ)** (درجة و نصف) أوجد حل المسألة التالية :
$[a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5(2^n); \forall n \ge 2]$ ، حيث $a_0 = 2$ **و** $a_1 = 3$ **.**
(ب) (درجة و نصف) باستخدام دالة مولدة عادية، أوجد حل المسألة التالية :
$[a_n = 3a_{n-1} + 2^{n-1}; \forall n \ge 1]$ ، حيث $a_0 = 1$.

(4) (درجتان) إذا كانت C_{14} دورة في رسم ما، و إذا عنونت رؤوسها عشوائيا بالأعداد: 1, 2, …, 14 ،
فأثبت أنه توجد أربعة رؤوس متعاقبة مجموع عناوينها أكبر من أو يساوي 30.