جامعة الملك سعود — الاختبار النهائي — الفصل الأول 1437/1438هـ

كلية العلوم- قسم الرياضيات — في المقرر 431 ريض — الزمن: ثلاث ساعات

ملحوظة: كل الرسوم المدروسة هنا هي رسوم بسيطة.

السؤال الأول : (11 درجة)

(1) (3 درجات) إذا كان G رسما عدد رؤوسه $n \geq 3$ و عدد أضلاعه m، و كان $m \geq \binom{n-1}{2} + 2$، فأثبت أن G هاملتوني.

(2) (درجتان) إذا كان G رسما عدد رؤوسه $n \geq 11$، فأثبت أن G أو $\overline{G}$ غير مستو.

(3) (3 درجات) إذا كان G رسما مستويا مترابطا، عدد رؤوسه v و عدد أضلاعه e ، طول أقصر دورة فيه يساوي k ، فأثبت أن $e \leq \frac{k}{k-2}(v-2)$.

(4) (3 درجات) ينظم قسم الرياضيات الاختبارات النهائية لسبعة مقررات مرقمة من 1 إلى 7 . لكل زوج من الأزواج التالية فقط يوجد على الأقل طالب مسجل في المقررين:

$$\{1,2\}, \{1,4\}, \{1,7\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,7\}, \{4,7\}, \{5,6\}, \{6,7\}.$$

أنشىء جدولا لهاته الاختبارات بأقل عدد ممكن من الفترات.

السؤال الثاني : (9 درجات)

(1) (5 درجات) جد جميع قيم العدد الصحيح الموجب n ، في كل من الحالات التالية:

(i) يكون الرسم $K_{n,n}$ شجرة. **(ii)** يكون الرسم $K_{n,n}$ هاملتونيا.

(iii) يكون الرسم $K_{n,n+2}$ أويلريا. **(iv)** يكون المضموم $C_{2n}+P_n$ رسما نصف أويلري.

(v) توجد شجرة T ، عدد رؤوسها n ، بحيث T تماثل متممها $\overline{T}$.

(2) ليكن G رسما عدد رؤوسه $n \geq 3$. في كل من الحالتين التاليتين ، أثبت أن الرسم G يماثل الرسم $K_{1,n-1}$.

(أ) (درجة واحدة) الرسم G هو رسم ثنائي التجزئة بحيث $\Delta(G) = n-1$.

(ب) (درجة واحدة) الرسم G هو شجرة لها بالضبط (n-1) رأسا درجة كل منها تساوي 1.

(3) (درجتان) أثبت أن $k^7 - 4k^6 + 3k^5 - k^4 + 2k^3 - k^2$ ليست كثيرة حدود لونية.

السؤال الثالث : (12 درجة)

(1) (3 درجات) ليكن n عددا صحيحا موجبا . أثبت أن عدد التباديل التامة للمجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ هو

$$d_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

(2) **(أ)** (درجة واحدة) جد معامل $x^3y^5z^6w^3$ في مفكوك $(x+y+z+w)^{17}$.

(ب) (درجة واحدة) جد عدد حدود مفكوك $(x+y+z+w)^{17}$.

(3) (أ) (درجتان) جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $x_1+x_2+x_3+x_4=19$ إذا كان
$x_1 \geq -3$ ، $x_2 > 4$ ، $x_3 \geq 2$ ، $x_4 \geq 4$

(4) جد عدد التباديل f للمجموعة $\{1,2,\ldots,2n\}$ ، حيث $n \geq 2$ عدد صحيح، في كل من الحالات التالية:

(i) f تترك بالضبط n عددا في أماكنها الطبيعية. (درجة ونصف)

(ii) f تترك كل عدد فردي في مكانه الطبيعي. (درجة ونصف)

(iii) $f(2n)=2n$ و $f(\{1,n\})=\{1,n\}$ و f تترك بالضبط n عددا في أماكنها الطبيعية. (درجتان)

السؤال الرابع: (8 درجات)

(1) (درجتان) أعط برهانا تركيبيا للمتطابقة: $\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$ ،
حيث k,m,n *أعداد صحيحة موجبة بحيث* $k \leq m \leq n$.

(2) (درجتان) باستخدام دالة مولدة أسية، أو جد عدد المتتاليات من الطول r ، المأخوذة من المجموعة *{1, 2,3,4 ,5 ,6}* و التي يظهر فيها كل من 3 و 6 مرة واحدة على الأقل .

(3) (أ) (درجتان) أوجد حل المسألة التالية :
$[a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 3^n; \forall n \geq 2]$ ، حيث $a_0 = 11$ و $a_1 = 33$.

(ب) (درجتان) باستخدام دالة مولدة عادية، أوجد حل المسألة التالية :
$[a_n = 2a_{n-1} + 3^{n-1}; \forall n \geq 1]$ ، حيث $a_0 = 1$.

نموذج لحل الاختبار النهائي
في المقرر 431 ريض
(الفصل الأول 38/37)

السؤال الأول

1) المطلوب هو إثبات "نتيجة (3,4)" بالصفحة 76 من الكتاب.

2) ليكن e عدد أضلاع G و $\bar{e}$ عدد أضلاع $\bar{G}$.
لنفرض بالتناقض أن كلا من G و $\bar{G}$ مستوٍ،
لنا إذاً $\begin{cases} e \le 3n-6 \\ \bar{e} \le 3n-6 \end{cases}$ وبالتالي يكون:

$e+\bar{e} = \frac{n(n-1)}{2} \le 6n-12$ ، وبدراسة إشارة $\frac{n(n-1)}{2}-(6n-12)$

نحصل على تناقض (لأن $n \geq 11$)

3) البرهان مشابه لبرهان "نتيجة (4,2)" بالصفحة 88 من الكتاب.

4) لنعتبر الرسم G حيث: $V(G)=\{1,2,\dots,7\}$
و $E(G)$ هي مجموعة الأزواج المعطاة في السؤال.
واضح أن المجموعة:

$$P=\{\{1,3,5\},\{2,7\},\{4,6\}\}$$

هي تجزيء لـ $V(G)$ مكون من 3 مجموعات مستقلة في G، إذاً $\chi(G) \le 3$
ومن ناحية أخرى، $K_3 \cong G[\{1,4,7\}]$ وبالتالي: $\chi(G) \geq 3$

(Page 1)

نستنتج أن $\chi(G)=3$ وأنه يمكن جدولة الاختبارات بأقل عدد ممكن من الفترات كما يلي:

الفترة 1 : المقررات : 1,3,5
الفترة 2 : المقرران : 2,7
الفترة 3 : المقرران : 4,6

السؤال الثاني (1) نعلل الإجابات التالية حيث $n \geq 1$ عدد صحيح.

(i) يكون الرسم $K_{n,n}$ شجرة إذا وفقط إذا كان $(n=1)$.

(ii) يكون الرسم $K_{n,n}$ هاملتونيا إذا وفقط إذا كان $(n\geq 2)$.

(iii) يكون الرسم $K_{n,n+2}$ أويلريا إذا وفقط إذا كان n زوجيا.

(iv) يكون المضموم $C_{2n}+P_n$ رسما نصف أويلري إذا وفقط إذا كان n عددا زوجيا.

(v) توجد شجرة T على رؤوسها n بحيث T تماثل $\bar{T}$ إذا وفقط إذا كان $n\in\{1,4\}$.

(2) (أ) ليكن $G=(X\cup Y,E)$ حيث X و Y مجموعتان مستقلتان في G، وحيث $u\in X$، الرأس u درجته $n-1$.

بما أن $\deg_G u=n-1$ و $N_G(u)\subseteq Y$ فإن: $X=\{u\}$ و $Y=V(G)\setminus\{u\}$،

إذا $\boxed{G\cong K_{1,n-1}}$.

(Page 2)

(ب) ليكن $V(G) = V_1 \cup \{u\}$ ، حيث V_1 هو مجموعة الرؤوس في الدرجة 1 (إذا كان $|V_1| = n-1$) ، ومنه $e(G) = n-1$

وأن ($\sum_{u \in V(G)} \deg_G u = 2e(G)$) ، فإن $\deg_G u = n-1$.

إذن $N_G(u) = V_1$ ، وبما أن $\deg_G x = 1$ لكل $x \in V_1$

فإن $N_G(x) = \{u\}$ لكل $x \in V_1$ وبالتالي $G \cong K_{1,n-1}$

(3) لنفرض بالتناقض أنه يوجد رسم G بحيث ،

$$P_G(k) = k^7 - 4k^6 + 3k^5 - k^4 + 2k^3 - k^2$$.

إذن لدينا ، $v(G) = 7$ ، $e(G) = 4$ و $c(G) = 2$ ،

حيث $c(G)$ هو عدد مركبات G .

إذن $e(G) = 4 < 5 = v(G) - c(G)$ ، وهذا يناقض مع كون "$e(G) \geq v(G) - c(G)$" لأي رسم G .

السؤال الثالث

(1) المطلوب إثباته هو مبرهنة (2,3) بالصفحة 44 في الكتاب .

(2) (أ) المعامل هو : $N = \binom{17}{3,3,5,6} = \frac{17!}{(3!)(3!)(5!)(6!)}$

(ب) عدد الحلول المذكور هو : $N = \binom{4-1+17}{17} = \binom{20}{17}$

(Page 3)

3) العدد المطلوب N هو عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة

$$y_1+y_2+y_3+y_4=11$$

(نرى ذلك، بالتعويض التالي:
$$y_1=x_1+3,\ y_2=x_2-5,\ y_3=x_3-2,\ y_4=x_4-4)$$

إذا، $N=\binom{4-1+11}{11}=\binom{14}{11}$

4) أ) العدد المطلوب هو: $N=\binom{2n}{n}d_n$

ب) العدد المطلوب هو: $N=n!$

ت) بدراسة الحالتين: $\left(\begin{cases} f(1)=1\\ f(n)=n\end{cases}\right)$ و $\left(\begin{cases} f(1)=n\\ f(n)=1\end{cases}\right)$

يمكن أن نرى أن العدد المطلوب هو:

$$N=\binom{2n-3}{n-3}d_n+\binom{2n-3}{n-1}d_{n-2}$$

السؤال الرابع: 1) لتكن X مجموعة عدد عناصرها n.

ولتكن المجموعة: $\mathcal{F}=\{(A,B):\ A\subseteq B\subseteq X,\ |A|=k,\ |B|=m\}$

- باختيار A ثم B نرى أن: $|\mathcal{F}|=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$
- باختيار B ثم A نرى أن: $|\mathcal{F}|=\binom{n}{m}\binom{m}{k}$
- إذا، لدينا:

$$\binom{n}{k}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

(Page 4)

2) ليكن a_r هو عدد المتتاليات من الطول r المعرفة بالسؤال،
الدالة المولدة الأسية للمتتالية (a_r) هي:

$$g(x) = \left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^4$$

إذاً $g(x) = (e^x-1)^2 e^{4x}$

إذاً $g(x) = (e^{2x}-2e^x+1)\,e^{4x} = e^{6x}-2e^{5x}+e^{4x}$

إذاً $g(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{6^r}{r!}x^r - 2\sum_{r=0}^{\infty}\frac{5^r}{r!}x^r + \sum_{r=0}^{\infty}\frac{4^r}{r!}x^r$

إذاً $\boxed{a_r = 6^r - 2\times 5^r + 4^r}$

3) أ) المعادلة المميزة للجزء المتجانس هي: $x^2-4x+4=0$

$x^2-4x+4=0 \iff (x-2)^2=0$

إذاً 2 هو الجذر المميز الوحيد وتكراره 2

إذاً الحل العام للجزء المتجانس هو: $a_n^{(h)} = (a+bn)2^n$
حيث $a,b\in\mathbb{R}$

- نبحث عن حل الخاص للمعادلة المعطاة على شكل: $a_n^p = c\times 3^n$ حيث $c\in\mathbb{R}$

بالتعويض في المعادلة نجد أن: $\boxed{c=9}$

إذاً الحل العام للمعادلة هو: $a_n = (a+bn)2^n + 3^{n+2}$

- باستخدام الشروط الابتدائية $\begin{cases} a_0 = 11 \\ a_1 = 33 \end{cases}$ نجد أن:

$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

إذاً حل المسألة هو $a_n = (2+n)2^n + 3^{n+2}$

(Page 5)

/3) ب) لتكن $f(x) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n x^n$

الدالة المولدة العادية للمتتالية (a_n) ؛

لدينا:

$$f(x) = 1 + \sum_{n\geq 1}^{\infty} \left(2a_{n-1} + 3^{n-1}\right) x^n$$

إذن

$$f(x) = 1 + 2x f(x) + x \sum_{n\geq 0}^{\infty} (3x)^n$$

أي

$$f(x) = 1 + 2x f(x) + \frac{x}{1-3x}.$$

أي

$$(1-2x) f(x) = \frac{1-2x}{1-3x}.$$

إذن

$$f(x) = \frac{1}{1-3x} = \sum_{n\geq 0}^{\infty} 3^n x^n$$

إذن

$$\boxed{a_n = 3^n}$$

(Page 6)