لا يكتب في هذا الهامش

1P

س1) السؤال الأول لتكن $X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$

$Y=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$ حيث $m\geq n$

ولتكن $f:X\longrightarrow Y$ دالة شاملة عن ...

$f^{-1}(y_i)=\{x\in X: f(x)=y_i\}$

$f^{-1}(y_i)\neq\Phi$ ، $X\supseteq f^{-1}(y_i)$ ، $f^{-1}(y_i)\cap f^{-1}(y_j)=\Phi$ لكل $i\neq j$ لأن f دالة

وبما أن f دالة شاملة فإن $\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(y_i)=X$ وبالتالي $\{f^{-1}(y_i):1\leq i\leq n\}$

تشكل تجزئة لـ X عدد أجزائها n ، وفي المقابل إذا كان لدينا تجزئة لـ X إلى n جزءاً فإنه يمكن الحصول على $n!$ دالة شاملة وبالتالي

عدد الدوال الشاملة هو حاصل ضرب عدد تجزئات X إلى n جزء أي $n!\,S(m,n)$

~~عدد الدوال الشاملة~~

أي عدد الدوال الشاملة الناتجة من كل تجزئ وهو $n!\,S(m,n)$

س2) بوضع U مجموعة جميع التطبيقات من X إلى Y حيث $|X|=m$ ، $|Y|=n$ ولتكن

$X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$

$Y=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$

$A_k=\{f\in U: y_k\notin R(f)\}$

فيكون المطلوب هو حساب العدد $|U-(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)|$

من مبدأ التضمين والاستبعاد فإن $|U-(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)|=|U|-\alpha_1+\alpha_2-\dots+(-1)^n\alpha_n$

نعلم أن $|U|=n^m$ لأنه لا شروط على اختيار الصورة

$$\alpha_1=|A_1|+|A_2|+\dots+|A_n|=(n-1)^m+(n-1)^m+\dots+(n-1)^m=n(n-1)^m$$

لأن أي عنصر في Y يمكن أن يكون صورة باستثناء y_i

$$\alpha_2=|A_1\cap A_2|+\dots+|A_{n-1}\cap A_n|$$

$|A_j\cap A_i|$ هو عدد الدوال من X إلى $Y\setminus\{y_j,y_i\}$ وهو $(n-2)^m$

$$\Rightarrow \alpha_2=\binom{n}{2}(n-2)^m$$

2

وهكذا فإن $\alpha_k=\binom{n}{k}(n-k)^m$ لكل $1\leq k\leq n$

$$\Rightarrow |U-(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)|=n^m-\binom{n}{1}(n-1)^m+\binom{n}{2}(n-2)^m-\dots$$

$$+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(1)^m+\cancel{(-1)^n\binom{n}{n}(0)^m}$$

$$=n^m-\binom{n}{1}(n-1)^m+\binom{n}{2}(n-2)^m-\dots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^k(n-k)^m$$

#

لا يكتب في
هذا الهامش

س٣) $T=(V,E)$ رسم لا يحتوي على دورات، $|V|=n$ ، $|E|=n-1$

~~أثبت / لنكن~~ برهن أن T شجرة

البرهان/ لتكن $C_1, C_2, \dots, C_m$ هي مركبات T حيث $C_i=(V_i,E_i)$ لكل $1\le i\le m$

عندئذٍ C_i رسم لا يحتوي على دورات (لأنه رسم جزئي من T) ومترابط

$\Rightarrow$ C_i شجرة لكل $1\le i\le m$

$\Rightarrow$ $|E_i|=|V_i|-1$ لكل $1\le i\le m$

$\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{m}|E_i| = \sum_{i=1}^{m}(|V_i|-1)$

لأن مجموع أضلاع المركبات يساوي جميع أضلاع الرسم وكذلك الرؤوس

$\Rightarrow$ $|E| = |V|-m$

بالتعويض $\Rightarrow$ $n-1 = n-m$

$\Rightarrow$ $\boxed{m=1}$

$\Rightarrow$ T مترابط ومن المعطيات فهو لا يحتوي على دورات $\Rightarrow$ T شجرة #

س٤) G رسم مترابط مستوي فإن $v-e+f=2$

بالاستقراء الرياضي على f (عدد الأوجه) عندما $f=1$

فإنه حذف أي ضلع من G لن يغير عدد الأوجه f ، بالتالي كل ضلع

في G جسر $\Rightarrow$ G لا يحتوي على دورات ، مترابط $\Rightarrow$ $e=v-1$ — شجرة رسم مستوي

$v-e+f = v-(v-1)+1 = 2$

إذن العلاقة محققة عندما $f=1$

لنفرض أن العلاقة محققة عندما $f=k$ حيث $k\geq 1$

وليكن G رسم عدد أوجه $f(G)=k+1$

بما أن $f(G)\geq 2$ فإنه G يحتوي على دورة وليكن e أحد أضلاعها

عندئذٍ $f(G-e)=f(G)-1$ لأن e ليس جسراً و G رسم مستوي

وبفرضية الاستقراء نجد:

$v(G-e)-e(G-e)+f(G-e)=2$ — *

ومن المعلوم أن

$v(G-e)=v(G)$

$e(G-e)=e(G)-1$ ، $f(G-e)=f(G)-1$

لا يكتب في هذا الهامش

بالتعويض في * نجد ان $v(G)-(e(G)-1)+f(G)-1=2$

$\Rightarrow v(G)-e(G)+f(G)=2$

إذن العلاقة محققة لكل رسم مستوي مترابط

ش) $G=(V,E)$ ، $|V|=n\geq 3$ وليكن $u,v\in V$

رأسين غير متجاورين بحيث $\deg u+\deg v\geq n$

$G+uv$ هاملتوني $\Leftarrow$ G هاملتوني

البرهان/ نفترض جدلاً أن G ليس هاملتوني

$\Leftarrow$ أي دورة هاملتونية في $G+uv$ يجب أن تحوي الضلع uv

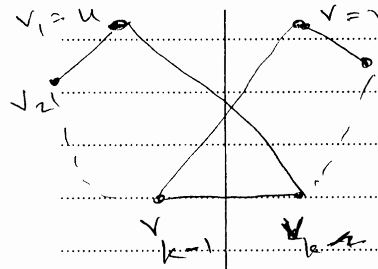
ولتكن $u=v_1e_1v_2e_2\cdots e_{n-1}v_n=v\,e_n\,v_1$ حيث $e_n=uv$

دورة هاملتونية في $G+uv$.

إذا وجد $3\leq k\leq n-1$ بحيث v_k يجاور v_1 و v_{k-1} يجاور v_n

فإن ~~$v_1e_1v_2e_2\cdots e_{k-2}v_{k-1}$~~ $v_1v_2\cdots v_{k-1}v_nv_{n-1}\cdots v_kv_1$

دورة هاملتونية في G كما هو موضح بالرسم



لذا فإن لكل v_k مجاور لـ v_1 ويختلف عن v_2 ~~فإن~~

v_{k-1} لا يجاور v_n وعليه فإن:

$\deg_G v_n \leq n-2-(\deg_G v_1-1)$

$\Rightarrow \deg_G v \leq n-2-\deg_G u+1$

$\Rightarrow \deg_G u+\deg_G v\leq n-1$

وهذا تناقض مع المعطيات

#

#

الجزء الباقي $\boxed{ب}$

لا يكتب في هذا الهامش

السؤال الأول

1 2 3 4 5 6 7 8 9
REFERENCE   (i) $\boxed{P}$ (س 1

عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من الكلمة هو نفس عدد

تباديل المجموعة المتضاعفة $\{2*R, 4*E, N, C, F\}$

وهو $\binom{9}{2,4,1,1,1} = \dfrac{9!}{2!\,4!\,1!\,1!\,1!} = 7560$ 2

(ii) عندما لا يتعاقب حرفا E

أولاً نقوم باختيار أماكن بقية الحروف $\{2*R, N, C, F\}$

ثم نضع الحروف $\{4*E\}$ بحيث لا يتعاقب حرفا E

في الخطوة الأولى ~~نقوم بـ~~

$0\cdot0\cdot0\cdot0\cdot0\cdot0$ عدد الطرق هو $\dfrac{5!}{2!\,1!\,1!\,1!}$ 2

في الخطوة الثانية:

هناك ستة أماكن يمكن أن نضع فيها الحروف $\{4*E\}$

وعدد الطرق هنا هو $\binom{6}{4}$

إذن من مبدأ حاصل الضرب فإنه

عدد الكلمات في (i) بحيث لا يتعاقب حرفا E هو $\dfrac{5!}{2!}\times\binom{6}{4} = 900$

$\boxed{ب}$ (i) عدد الحلول الصحيحة للمسألة التالية:

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15$

$x_1+x_2+x_3=6 \qquad x_i \geq 0$ $\forall\, 1\leq i\leq 5$

عدد حلول المعادلة الثانية هو $\binom{8}{6} = \binom{6+3-1}{6}$

بتعويض المعادلة الثانية في الأولى نحصل على $x_4+x_5 = \cancel{8}\,9$ 2

وعدد حلول هذه المعادلة هو $\binom{10}{9} = \binom{9+2-1}{9}$

إذن عدد الحلول الصحيحة لنظام المعادلات هو

$\binom{8}{6}\times\binom{10}{9} = 280$

(ii) عندما $x_1+x_2+x_3 \le 6$

فإنه توجد سبعة حالات منفصلة وهي :

① عندما $x_1+x_2+x_3=6$

وعدد الحلول الصحيحة للمسألة (النظام المعادلات) هو $\binom{8}{6}\times\binom{10}{9}$

② عندما $x_1+x_2+x_3=5$

$\cancel{x_4+x_5=10}$

وعدد الحلول الصحيحة للمسألة هو $\binom{7}{5}\times\binom{11}{10}$

2/1

③ عندما $x_1+x_2+x_3=4$ عدد الحلول هو $\binom{6}{4}\times\binom{12}{11}$

④ 〃 $x_1+x_2+x_3=3$ 〃 〃 〃 $\binom{5}{3}\times\binom{13}{12}$

⑤ 〃 $x_1+x_2+x_3=2$ 〃 〃 〃 $\binom{4}{2}\times\binom{14}{13}$

⑥ 〃 $x_1+x_2+x_3=1$ 〃 〃 〃 $\binom{3}{1}\times\binom{15}{14}$

⑦ 〃 $x_1+x_2+x_3=0$ 〃 〃 〃 $\binom{2}{0}\times\binom{16}{15}$

10

إذن عدد الحلول في (أ) عندما $x_1+x_2+x_3\le 6$ (من مبدأ الجمع) هو

$$\binom{8}{6}\times\binom{10}{9}+\binom{7}{5}\times\binom{11}{10}+\binom{6}{4}\times\binom{12}{11}+\binom{5}{3}\times\binom{13}{12}$$

$$+\binom{4}{2}\times\binom{14}{13}+\binom{3}{1}\times\binom{15}{14}+\binom{2}{0}\times\binom{16}{15}=96$$

لا يكتب في
هذا الهامش

$$a_n + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n \qquad n \geq 2$$

$$a_0 = 0 , \quad a_1 = 2$$

أ

$$x^n + 4x^{n-1} + 4x^{n-2} = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

جذر مميز مكرر مرتين

$$\Rightarrow \boxed{a_n^{(h)} = c_0(-2)^n + c_1 n(-2)^n}$$

حل المعادلة المتجانسة

$$a_n^{(p)} = b_0 + b_1 n$$

بما أن 1 ليس جذر مميز فإن

3

بالتعويض في المعادلة

$$\Rightarrow b_0 + b_1 n + 4(b_0 + b_1(n-1)) + 4(b_0 + b_1(n-2)) = n$$

$$\Rightarrow \cancel{b_0} + b_1 n + 4\cancel{b_0} + 4b_1 n - 4b_1 + 4\cancel{b_0} + 4b_1 n - 8b_1 = \cancel{n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9b_0 - 12b_1 = 0 \Rightarrow 9b_0 = \frac{12}{9} \Rightarrow \boxed{b_0 = \frac{\cancel{12}\ 4}{\cancel{81}\ 27}} \\ 9b_1 = 1 \Rightarrow \boxed{b_1 = \frac{1}{9}} \end{cases} \Rightarrow a_n^{(p)} = \frac{12}{81} + \frac{1}{9}n = \frac{4}{27} + \frac{1}{9}n$$

$$\Rightarrow a_n = c_0(-2)^n + c_1 n(-2)^n + \frac{4}{27} + \frac{1}{9}n$$

$$a_0 = 0 \Rightarrow c_0 + \frac{4}{27} = 0 \Rightarrow \boxed{c_0 = \frac{-4}{27}}$$

$$a_1 = 2 \Rightarrow -2c_0 - 2c_1 + \frac{7}{27} = 2 \Rightarrow 2c_0 + 2c_1 = \frac{-47}{27}$$

$$\Rightarrow \cancel{4c_1 = \frac{55}{27}} \Rightarrow \cancel{c_1 = \frac{55}{54}} \qquad \boxed{c_1 = \frac{-13}{18}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{-4}{27}(-2)^n + \frac{-13}{18}n(-2)^n + \frac{4}{27} + \frac{1}{9}n}$$

$$\frac{-13}{18}$$

$0 \leq x_i \leq 7$ حيث $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$

ب

الدالة المولدة لعدد الحلول هي

3

$$g(x) = (1 + x + \cdots + x^7)^4$$

$$= \left(\frac{1-x^8}{1-x}\right)^4 = (1-x^8)^4 (1-x)^{-4} = (1 - 4x^8 + 6x^{16} - 4x^{24} + x^{32}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{k} x^k$$

المطلوب هو معامل x^{18} وهو

$$\binom{21}{18} - 4 \times \binom{13}{10} + 6 \times \binom{5}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\text{عدد الحلول الصحيحة} = 246}$$

لا يكتب في هذا الهامش

$G = (V, E)$

السؤال الثاني/ (أ) G رسم بسيط مترابط مستوي وكان $e \le 29$
فبين يوجد رأس x في G بحيث $\deg x \le 4$

لنفرض أن $\deg x \ge 5$ لكل $x \in V$ ، عندئذ $\sum_{x \in V} \deg x \ge 5v$

$$\sum_{x \in V} \deg x = 2|E| \Rightarrow 2e \ge 5v \Rightarrow \boxed{v \le \frac{2e}{5}}$$

ولكن بما أن G رسم مستوي مترابط فإن $e(G) \le 3v(G) - 6$

7//

$$\cancel{\Rightarrow 2e(G) \le 6v(G) - 12 \Rightarrow 2e(G) \le \frac{12}{5}e - 12}$$

$$\Rightarrow e \le 3v - 6 \le 3\left(\frac{2e}{5}\right) - 6 \Rightarrow e \le \frac{6e}{5} - 6$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{12e}{5} - 2e \ge 12 \Rightarrow \frac{2}{5}e \ge 12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}e \ge 6 \Rightarrow e \ge 30$$

وهذا تناقض مع كون $e \le 29$

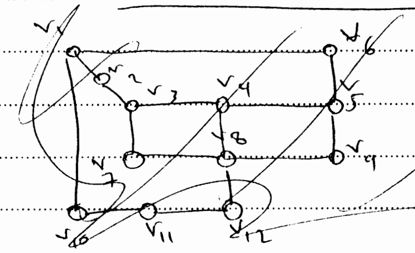
(ب) لنفرض أن T شجرة عدد رؤوسها 5 ولتكن $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
ويحتوي على رأسين درجة كل منهما 3 وليكن $\deg v_1 = \deg v_2 = 3$
ونعلم أن عدد أضلاع T هو 4 وأنها تحوي رأسين درجة كل منهما 1 إذن

$$1 + 1 + 3 + 3 + \deg v_5 = 2|E| = 8$$

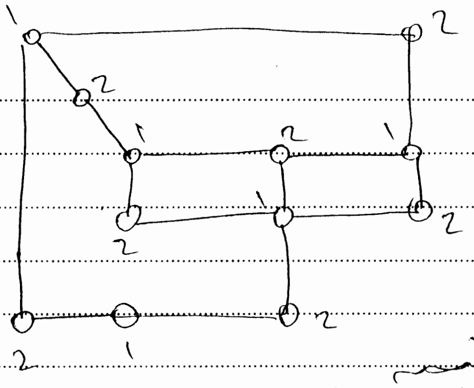
2//

$\Rightarrow \deg v_5 = 0 \Rightarrow$ يوجد رأس منعزل في T

وهذا تناقض مع كون T مترابط لأنه شجرة



(ج) ليس ثنائي التجزئة لأنه رسم مترابط ويحوي دورة فردية هي $v_1 v_2 v_3 v_7 v_8 v_{12} v_{11} v_{10} v_1$



ج

(أ) الرسم G ثنائي التجزئة

2 لأنه لو اعتبرنا $C=\{1,2\}$

ألوان فإنه يمكن تلوين G بلونين

أي أن $\chi(G)=2$ ← G ثنائي التجزئة

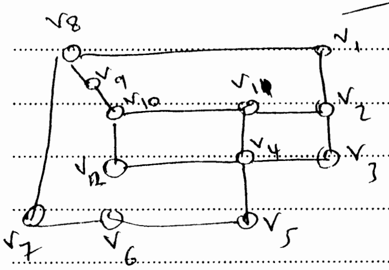
(ii) ليس نصف أويلري لأنه يحوي أكثر من رأسين

2 درجة كل منهم فردية . مثلاً v_2 , v_{11} , v_{10}

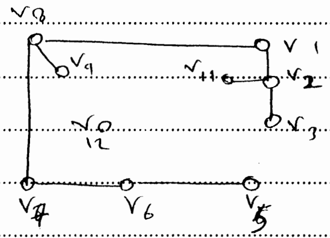
~~(iii) هاملتوني لأنه يحوي دورة~~

~~جميع الرؤوس ... كالتالي~~

(iii)

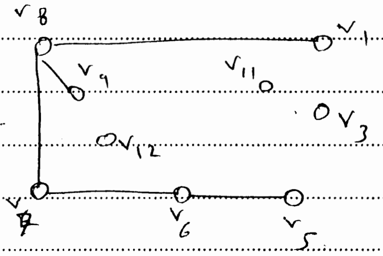


بحذف الرأسين v_{10} , v_4



بحذف v_2

2

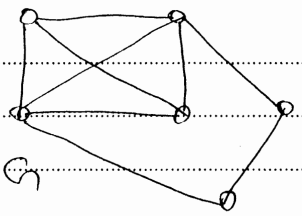


عدد المركبات في هذا الرسم 4

لأنه يوجد $S=\{v_{10}, v_4, v_2\}$ فإن $|S|=3$, $W(G-S)=4>|S|=3$

وبالتالي الرسم غير هاملتوني

لا يكتب في هذا الهامش



G

س٣) [أ] نعلم أن

$\chi(K_4) = 4$

وبما أن K_4 رسم جزئي من G فإن

$\chi(G) \geq \chi(K_4) \Rightarrow \boxed{\chi(G) \geq 4}$ —①

وبما أن $\Delta(G) = \max\{\deg x : x \in V(G)\}$

$\Rightarrow \Delta(G) = 4$

2

بما أن الرسم بسيط ومترابط وغير تام فمن مبرهنة بروكس نجد أن: $\chi(G) \leq \Delta(G)$

$\Rightarrow \boxed{\chi(G) \leq 4}$ —②

من ① و ② فإن $\chi(G) = 4$

[ب] G رسم ~~بسيط~~ مستوٍ بحيث $e = 13 , v = 8$

لنفرض أن G رسم ثنائي التجزئة حيث $V = V_1 \cup V_2$

ولتكن $|V_1| = n , |V_2| = m$

عندئذٍ $n + m = 8$

~~$nm = 13 \Rightarrow n = 1$ or $m = 1$~~

عندما $n = 1$ فإن $m = 7$ ، وهذا يناقض $nm = 13$

" $m = 1$ " " $n = 7$ " $nm = 13$

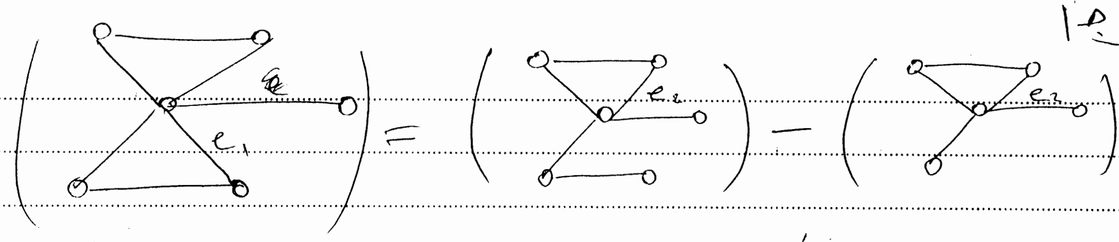
إذن G ليس ثنائي التجزئة $\Leftrightarrow \chi(G) \neq 2$

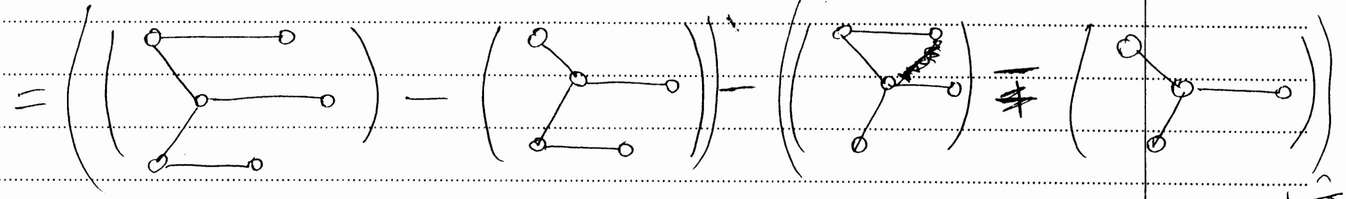
وبما أن G يحتوي على ضلع فإن $\chi(G) \geq 2$

إذن $\chi(G) > 2$

لا يكتب في هذا الهامش

15





أشجار

$$= k(k-1)^5 - k(k-1)^4 - k(k-1)^4 + k(k-1)^3$$

$$= k(k-1)^3\left[(k-1)^2 - (k-1) - (k-1) + 1\right]$$

3

$$= k(k-1)^3\left[k^2 - 2k + 1 - k + 1 - k + 1 + 1\right]$$

$$P_G(k) = k(k-1)^3\left[k^2 - 4k + 4\right] = \underline{k(k-1)^3(k-2)^2}$$

$$P_G(1) = 0 \quad , \quad P_G(2) = 0$$

$$P_G(3) = 3 \times 2^3 \times 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\chi(G) = 3}$$

$$k^4 - 3k^3 + 3k^2 = P(k)$$

نلاحظ أن $P(1) = 1 \neq 0$

2

وبالتالي لو كانت هذه كثيرة حدود لونية لرسم ما

فإن عدده اللوني هو 1 وعدد رؤوسه 4

أي الرسم هو الرسم الصفري N_4

ولكن $P_{N_4}(k) = k^4$

إذن $k^4 - 3k^2 + 3k^2$ ليست كثيرة حدود لونية

عندما كثيرة حدود لونية فإنه إما $P_G(1) = 0$

أو $P_G(k) = k^n$

لا يكتب في
هذا الهامش

السؤال الثالث

ب)

G رسم بسيط مستوي $e=13$, $v=8$

جـ/ $\chi(G) \geq 2$

بما أن G يحتوي على أضلاع فإن $\chi(G)\geq 2$

~~لنفرض أن $\chi(G)=2$ أي أن G رسم ثنائي التجزئة~~

~~بما أن G رسم مستوي فإن $e(G)\leq 3v(G)-6$~~

~~(مع أنه لو كان G غير مستوي فإنه لو جعلناه مستوياً فإن عدد الأضلاع يصبح أكبر)~~

~~إذن $e(G)\leq 3v(G)-6$~~

لنفرض أن G رسم ثنائي التجزئة

~~G لا يحتوي على دورات فردية~~

~~G رسم بسيط مستوي ولا يحوي مثلثات~~

~~$e(G)\leq 2v(G)-4$~~

~~(مع أنه لو كان G غير مستوي فإنه لو جعلنا G مستوياً فإن عدد الأضلاع في هذه الحالة يصبح أكبر)~~

~~$13\leq 2(8)-4$~~

~~$\Rightarrow 13\leq 14$~~

G رسم ثنائي التجزئة ومستوي وبسيط $V=V_1 \cup V_2$

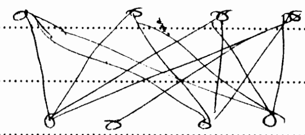
عندئذ إما $|V_1|<3$ أو $|V_2|<3$

نفرض $|V_1|<3$

فإما $|V_1|=1$ و $|V_2|=7$ وهذا مستحيل لأن $e=13$ وهذا يناقض $e\leq |V_1||V_2|$

أو $|V_1|=2$ و $|V_2|=6$ وهذا مستحيل أيضاً لأنه يعني $13\leq 12$

إذن G ليس ثنائي التجزئة



السؤال الثالث

ب) G رسم بسيط مستوي بحيث $v = 8$, $e = 13$

$\chi(G) > 2$

بما أن G يحتوي ضلع فإن $\chi(G) \geq 2$

ولنفرض أن G ثنائي التجزئة أي $G = (V_1 \cup V_2, E)$

$|V_1| = n , |V_2| = m$ $\quad n + m = 8$, $e \leq nm$

بما أن G مستوي فإن $n < 3$ أو $m < 3$

لنفرض أن $n < 3$

⇐ إما $n = 2 \Leftarrow m = 6 \Leftarrow 13 \leq 12$ وهذا تناقض

أو $n = 1 \Leftarrow m = 7 \Leftarrow 13 \leq 7$ وهذا تناقض

⇐ G ليس ثنائي التجزئة $\Leftrightarrow \chi(G) \neq 2$

$\Leftarrow \chi(G) > 2$

لو فرضنا $n \geq 3 , m \geq 3$

عندما $n = 3 , m = 5$ فإنه

$\deg x \geq 3$ لكل $x \in V_1$ ⇐ $K_{3,3}$ رسم جزئي

من G وهذا تناقض مع كونه مستوي

وعندما $n = m = 4$

فإنه $\deg x \geq 3$ لكل $x \in V_1$ ⇐ $K_{3,3}$ رسم جزئي من G

وهذا تناقض مع كونه مستوي