جامعة الملك سعود	الاختبار النهائي	الفصل الدراسي الثاني
كلية العلوم	في المقرر	١٤٣٠ / ١٤٣١ هـ
قسم الرياضيات	٤٣٤ ريض	الزمن: ٣ ساعات

س١ اكتب نص مبدأ التضمين والإقصاء وأثبته.

س٢ إذا كانت $u_n + d_1 u_{n-1} + \cdots + d_k u_{n-k} = 0$ علاقة ارتدادية خطية ذات معاملات ثابتة وجذورها المميزة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ مختلفة، فأثبت أنه يمكن كتابة الحل العام على الصورة $u_n = c_1 \alpha_1^n + \cdots + c_k \alpha_k^n$ حيث $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ثوابت.

س٣ (أ) أثبت أن الشجرة التي عدد رؤوسها n يكون عدد أضلاعها $n-1$. 3

(ب) إذا كان $G=(V,E)$ مترابطاً بحيث $|V|=n$ فأثبت أن $|E| \geq n-1$. 2

س٤ (أ) أثبت أن T شجرة إذا وفقط إذا كان يوجد ممر وحيد بين كل رأسين في T. 3

(ب) إذا كانت T شجرة عدد رؤوسها $n>1$ فجد عدد الممرات في T. 2

س٥ (أ) إذا كان G هاملتونياً فأثبت أن $\omega(G-S) \leq |S|$ لكل مجموعة جزئية فعلية غير خالية S من $V(G)$. 2½

(ب) إذا كان G رسماً عدد رؤوسه n وكان $\deg x + \deg y \geq n-1$ لكل رأسين غير متجاورين $x, y \in V(G)$ فأثبت أن G نصف هاملتوني. 2½

س٦ (أ) إذا كان G رسماً مترابطاً مستوياً عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه $e \geq 3$ فأثبت أن $e \leq 3v-6$. 3

(ب) أثبت أن K_5 رسم غير مستوٍ. 2

س٧ إذا كانت A مجموعة عدد عناصرها $n > 0$ فجد ما يلي:

(أ) عدد التطبيقات التي يمكن تعريفها من A إلى A.

(ب) عدد العلاقات التي يمكن تعريفها على A.

(ج) عدد العلاقات التناظرية التي يمكن تعريفها على A.

لا يكتب في هذا الهامش

س: جد عدد الحلول الصحيحة للمسألة التالية: $x_1 + x_2 + x_3 = 11$

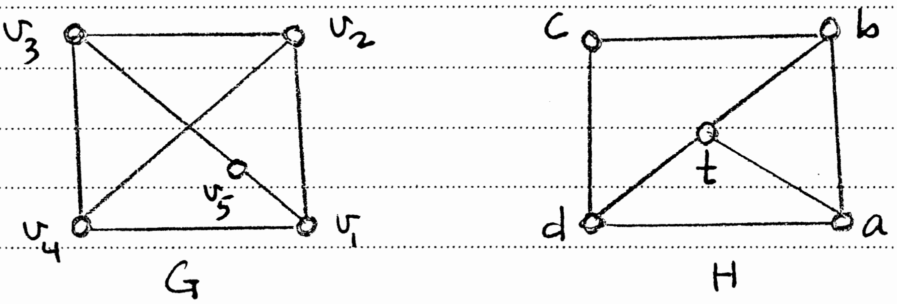
$0 \le x_1 \le 3$, $0 \le x_2 \le 4$, $0 \le x_3 \le 6$

س: جد حل المسألة التالية: $a_n - 3a_{n-1} = 5(3^n)$ لكل $n \ge 1$،

$a_0 = 2$ $(1\frac{1}{2})$

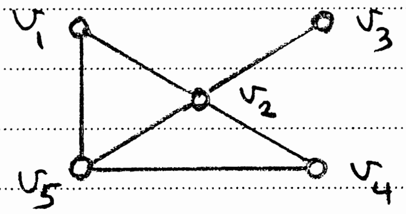
س (أ) إذا كان G رسماً (بسيطاً) عدد أضلاعه 60 فما هو أقل عدد ممكن لرؤوسه؟ علل إجابتك.

(ب) بيّن فيما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا.



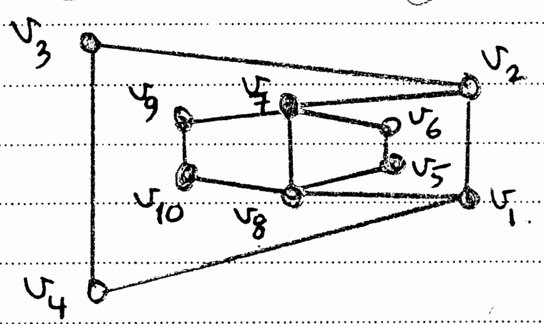
س (أ) بيّن فيما إذا كانت 1 , 1 , 2 , 3 , 3 متتالية رسمية أم لا، وجد تحقيقاً لها إذا كانت رسمية.

(ب) جد عدد المسارات من الطول 3 من الرأس v_1 إلى الرأس v_2 في الرسم التالي:



س (أ) بيّن فيما إذا كان الرسم التالي: (i) ثنائي التجزئة، (ii) نصف أويلري، (iii) هاملتونياً.

(1) (1) (1)



(ب) إذا كان G رسماً ثنائي التجزئة بحيث $\deg x \ge 4$ لكل $x \in V(G)$ فبيّن فيما إذا كان G مستوياً أم لا.

س ٤: لنفرض أن كلا من

$$u_1^{(1)} = \alpha_1^{\,n}, \ldots, u_k^{(k-1)} = \alpha_{k-1}^{\,n}$$

حل للعلاقة الارتدادية إذن

$u_n + d_1 u_{n-1} + \cdots + d_k u_{n-k} = 0$ حل للعلاقة الارتدادية

لنبرهن أن $u_n = b_n$ حل للعلاقة الارتدادية

يجب أن

$u_n + d_1 u_{n-1} + \cdots + d_k u_{n-k} = 0$ توجد ثوابت $c_1, \ldots, c_n$

تحقق الشروط الابتدائية $u_0 = b_0, \ldots, u_{k-1} = b_{k-1}$

بتطبيق الشروط الابتدائية نحصل

$$c_0 + \cdots + c_{k-1} = b_0$$
$$\alpha_1 c_0 + \cdots + \alpha_{k-1} c_{k-1} = b_1$$
$$\alpha_1^2 c_0 + \cdots + \alpha_{k-1}^2 c_{k-1} = b_2$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1^{k-1} c_0 + \cdots + \alpha_{k-1}^{k-1} c_{k-1} = b_{k-1}$$

لكن:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{k-1} \\ \alpha_1^2 & \cdots & & \alpha_{k-1}^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & \cdots & & \alpha_{k-1}^{k-1} \end{vmatrix} = \prod (\alpha_j - \alpha_i)$$

$1 \le i < j \le n$

بما أن $\alpha_i \neq \alpha_j$ لكل $i \neq j$ فإن $|A| \neq 0$

وبالتالي يوجد للمعادلة حل وحيد وهو $u_n = b_n$

مسألة ٣: باستخدام الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس

عندما $n = 1$ فإن الشجرة تكون الرسم التام K_1 [illegible]

صحيحة في هذه الحالة.

نفرض أن ... $k \ge 2$ ... لتكن T شجرة عدد رؤوسها $k+1$

لا بد $\deg v = 1$ و $T-v$ لا يحتوي على دورات لأن T

شجرة لا تحتوي على دورات وبالتالي $T-v$ شجرة عدد

رؤوسها K وبالتالي فإن عدد أضلاع $T-v$ هو $k-1$

وبالتالي فإن عدد أضلاع T هو K.

(ب) على $G=(V,E)$ بيان مترابط فإنه يوجد له شجرة مولدة

$T=(V,E')$ حيث $E' \subseteq E$ فإن $|E| \geq |E'|$

وبما أن $|E'| = n-1$ فإن $|E| \geq n-1$

$\boxed{\text{س ٦}}$: (٣) لنفترض أن G رسم مستوٍ مترابط عدد رؤوسه v

وعدد أضلاعه e وعدد أوجهه f. نكون رسم ثنائي التجزئة

$H=(X,Y,E')$ حيث $X=\{x_1,\dots,x_e\}$ وهي مجموعة

أضلاع الرسم G و $Y=\{y_1,\dots,y_f\}$ وهي مجموعة أوجه الرسم

G. ونصل بين الضلع $x_i y$ في H إذا كان الضلع x هو أحد

الأضلاع التي تحد الوجه y، وكل وجه y لا بد أن

$\deg_H y \geq 3$ لأن محيط أي دورة على الأقل 3 وكذلك

$\deg_H x \leq 2$ لأن أي ضلع يفصل لأكثر وجهين فقط ومن ذلك

$$|E'| = \sum_{i=1}^{e} \deg x_i = \sum_{j=1}^{f} \deg_H y_j$$

وعليه $2e \geq |E'| \geq 3f \Leftarrow 2e \geq 3f$

$3f \leq 2e$

$\cancel{3v - 3e + 3f = 6 \Rightarrow 3v - 3e + 2e \geq 6}$

$\Rightarrow -e \geq 6 - 3v \Rightarrow e \leq 3v - 6$

وهو المطلوب .

ب) K_5 ليس مستوي لانه

لأن هذا عدد الرؤوس v هو $\boxed{v = 5}$

وعدد الاضلاع e هو $\boxed{e = 10}$

بتطبيق النتيجة السابقة $e \leq 3v - 6$

$$10 \leq 3(5) - 6 = 15 - 6 = 9$$

وهذا تناقض اذن K_5 ليس مستوي .

س٨

$$|U| = \binom{3-1+11}{11} = \binom{2+11}{11} = \binom{13}{11} = \frac{13 \times 12}{2} = 78$$

$$A_1 = \{x_1 \geq 4, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$$
$$A_2 = \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 5, x_3 \geq 0\}$$
$$A_3 = \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 7\}$$

$$|A_1| = \binom{3-1+7}{7} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

$$|A_2| = \binom{3-1+6}{6} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

$$|A_3| = \binom{3-1+4}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{3-1+2}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{3-1+0}{0} = \binom{2}{0} = 1$$

$$|A_2 \cap A_3| = 0$$

$\alpha_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 72$

$\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| = 7$

$\alpha_3 = 0$

$|U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 78 - 72 + 7 = 13$

$|U - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = 13$

$\boxed{9}$

$x^n - 3x^{n-1} = 0$

$x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

جذر مميز 3 تكراره واحد

$a_n^{(h)} = C_1 3^n$

$a^{(p)} = C n 3^n$

$C(n) 3^n - 3(n-1) 3^{n-1} = 5 (3^n)$

$3C = 5 \cdot 3 = 15$

$3C = 15 \Leftrightarrow C = \frac{15}{3} \Rightarrow \boxed{C = 5}$

$a_n^{(p)} = 5 n 3^n$

نعوض

نعوض عن a_1 و a_2 بالمعطيات التي هي

$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = C_1 3^n + 5 n 3^n$

$= (C_1 + 5n) 3^n$

نعوض

$a_0 = 2 \Rightarrow \boxed{C_1 = 2}$

$a_n = (2 + 5n) 3^n$

حل :

(أ) لاحظ هنا أن المخطط تام بسيط عدد أضلاعه 60

ملاحظة أن V مجموعة رؤوس مخطط منتظم

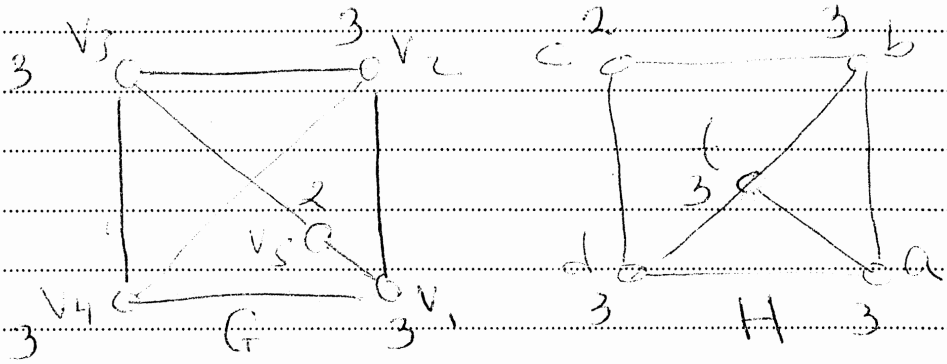
(ج) $|V| \geq 11$ فنلاحظ أن عدد الأضلاع للسبع

لا ...

(ب) $|V| \geq 12$ فنلاحظ أن عدد الأضلاع 66 ضلع

لذلك أقل عدد ممكن للرؤوس هو 12 رأس.

(ب)



نضع مقارنة بين الرؤوس من الجدول أولا.

G	H
v_5	c
v_1	b
v_3	d
v_4	t
v_2	a

~~لاحظ أن كل منها تقابل درجات الرؤوس~~

~~3,3,3,3,2 بالترتيب~~

وكذلك أن $f: V(G) \longrightarrow V(H)$

تطابقهما وكذلك كل ضلع

w, g في G هما نفس

$g(w), g(g)$ متطابقتان

لا يكتب في
هذا الهامش

(٢) س

$$|A| = n > 0$$

عدد العلاقات التي يمكن تعريفها من A إلى A

$$\binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n + \dots + (-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^n$$

(ب) عدد العلاقات التي يمكن تعريفها على A

$$|A \times A| = n^2$$

كلها 2^{n^2} هي

(ج) عدد العلاقات التناظرية التي يمكن تعريفها

$2^{\frac{n^2+n}{2}}$ هي

$2^{\frac{n^2-n}{2}} - 2^n$

س ١ (أ) لنفترض أن ...

... $X_1 \dots X_m$ ...

$P = X_1 \dots X_m$, $Q = Y_1 \dots Y_{r-1}$

$X_1 = Y_1$, $X_m = Y_{r-1}$ ولكن ... $i+1$

$X_{i+1} \neq Y_{i+1}$

$Y_{j+1} = X_t$ ... Y_{j+1}

دورة $X_1 X_{i+1} \dots X_t Y_j Y_{j-1} \dots Y_{i+1}$

G مترابط لنفرض ان G يحتوي على دورة $x_1, \dots, x_m$ فان

ليس هناك ممران مختلفان من x_1 الى x_2 وهي $x_1 \dots x_m$ والضلع x_1x_m وهذا

يتناقض مع ان انه لا يوجد سوى ممر وحيد وبالتالي G لا يحتوي على

دورة اذن T شجرة.

(ب) T شجرة عدد رؤوسها $n \geq 1$ فان

عدد ممرات ~~T هي~~ $\boxed{n-1}$

س١ (أ)

$S = 3, 3, 2, 1, 1$

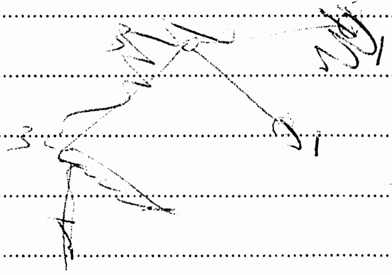
$S' = 2, 1, 0, 1$

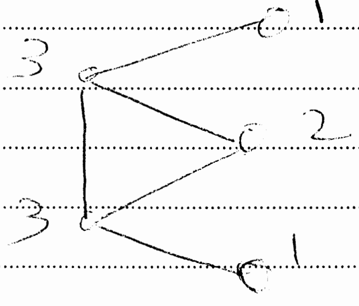
$2, 1, 1, 0$

$0, 0, 0$

بما ان S' بيانية ⇐ S بيانية

التي تحقق من الشكل التالي

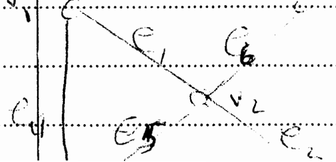




(ب) عدد المسارات من v_1 الى v_2 هي

$e_1e_2e_2, e_4e_3e_2, e_1e_6e_6$

$e_1e_1e_1, e_4e_4e_1, e_1e_5e_5$



لا يكتب في هذا الهامش

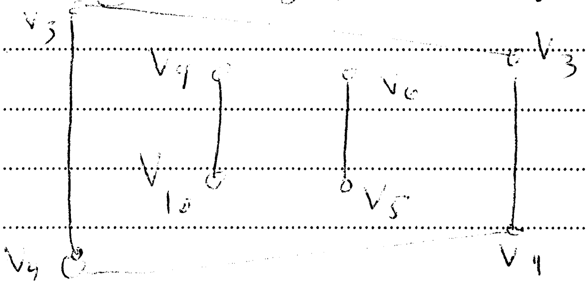
س ١٢ : (أ) (i) رسم ثنائي التجزئة لأنه لا يحتوي على دورات فردية .

(ii) ليس أويلري لأن يوجد رؤوس (v_1, v_5) درجتها فردية

لا يحتوي على أويلري ... على أربع رؤوس فردية . وهذا يناقض المبرهنة .

(iii) ليس هاملتونياً لأنه

لو أخذنا $S = \{v_7, v_8\}$ فإن $G - S$



فإن $w(G-S) = 3$

$\Leftarrow \quad \leq |S| = 2$

وهذا تناقض

إذن G ليس هاملتونياً .

(ب) لنفترض أن v عدد رؤوس الرسم G ... فإن

$v < 3$ ... لنفترض أن $v \geq 3$ ... نبرهن أن

$e \leq 2v - 4$ ... لنفترض أن G كل رؤوسه $\{x_1, \dots, x_v\}$

$\deg x \geq 4$ لكل $x \in V(G)$ ... فإن

$2e = \deg x_1 + \dots + \deg x_v$

$2e = \deg x_1 + \dots + \deg x_v \geq 4 + \dots + 4 = 4v$

$\Rightarrow 2e \geq 4v \Rightarrow e \geq 2v$

$2v - 4 \geq 2v$ لنفرض كذلك

$\Rightarrow -4 \geq 0$

س1

لم يُحدد أ التقسيم ولا عدد ا

$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 \dots + (-1)^{n-1} \alpha_n$

الإجابة: لا أدري ما هو المطلوب ؟؟

س2: أ) البرهان: لاحظ أن [illegible] صفحة [illegible] المرفقة

~~من المذكرة التي تدرس منها صفحة [illegible] 79 - 70~~

~~إذا حاولت ابتداءً لكن لم أستطع الإكمال في الوقت المناسب لا أدري ما هو البرهان!~~

ب) لاحظ أنه إذا كان $n = 1$ فإن G [illegible] هاملتوني [illegible].

لنفرض أن $n \geq 2$ ، لنضع $H = G + K_1$ حيث $V(K_1) = \{z\}$ [illegible]

$|E(H)| = n+1 \geq 3$ فإن

$\deg_H x + \deg_H y \geq n+1$ ؟؟

لكل x, y [illegible] H هاملتوني

وبالتالي [illegible] C في H [illegible] $C - \{z\}$ هو [illegible]