جامعة الملك سعود　　　الاختبار النهائي　　　الفصل الدراسي الثاني
كلية العلوم　　　في المقرر　　　١٤٣١/١٤٣٢هـ
قسم الرياضيات　　　٤٣٤ ريض　　　الزمن: ٣ ساعات

أجب عن ٦ أسئلة من الأسئلة التالية:

س١ (أ) جد عدد الحلول الصحيحة للنظام التالي:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 < 17$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_i \geq 0 \quad \forall \ 1 \leq i \leq 7$$

(ب) أثبت أن عدد الدوال الشاملة من مجموعة عدد عناصرها m إلى مجموعة عدد عناصرها n حيث $m \geq n$ يساوي

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

(جـ) جد عدد طرق الحصول على جميع الأعداد $1, 2, 3, 4, 5, 6$ في الوقت نفسه عند رمي 8 أحجار نرد مختلفة.

س٢ (أ) إذا كانت $u_n + d_1 u_{n-1} + \cdots + d_k u_{n-k} = 0$ علاقة ارتدادية خطية ذات معاملات ثابتة وجذورها المميزة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ مختلفة، فأثبت أنه يمكن كتابة الحل العام على الصورة $u_n = c_1 \alpha_1^n + \cdots + c_k \alpha_k^n$ حيث $c_1, \ldots, c_k$ ثوابت.

(ب) جد حل المسألة التالية:

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = n \quad \forall \ n \geq 2$$
$$a_0 = 1 \ , \ a_1 = -1$$

(جـ) جد عدد المتتاليات من الطول r المأخوذة من المجموعة $\{0, 1, 2\}$ والتي يظهر فيها كل من 0 ، 1 مرة واحدة على الأقل.

س٣ (أ) جد الدالة المولدة العادية للمتتالية (a_n) حيث $a_n = 3n^2 + 2n$.

(ب) جد حل المسألة التالية مستخدماً الدوال المولدة الأسية:

$$a_n = 2n\, a_{n-1} + 1 \quad \forall \ n \geq 1$$
$$a_0 = 1$$

(جـ) جد عدد الحلول الصحيحة للمسألة التالية:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$
$$0 \leq x_i \leq 9 \quad \forall \ 1 \leq i \leq 3$$

س٤ (أ) بيّن أن 2 , 3 , 3 , 3 , 4 , 4 , 5 متتالية رسمية وجد تجسيداً لها .

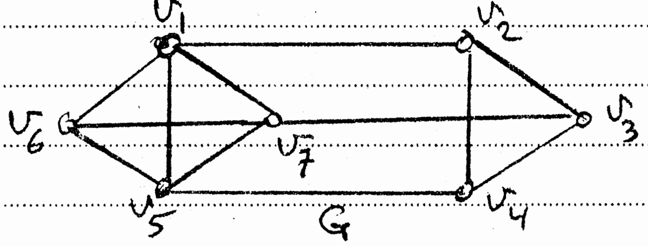
(ب) رسم عدد رؤوسه 12 وعدد أضلاعه 28 ودرجات رؤوسه إما 3 أو 5 . جد متتالية درجات هذا الرسم .

(جـ) لتكن $A=[a_{ij}]$ هي مصفوفة التجاور للرسم $G=(V,E)$ حيث $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ ولتكن $A^m=[a_{ij}^{(m)}]$ ، tr دالة الأثر ، أثبت أن عدد المثلثات (الدورات الثلاثية) في G التي v_i أحد رؤوسها يساوي $\frac{1}{2}a_{ii}^{(3)}$ ثم استنتج أن عدد المثلثات في G يساوي $\frac{1}{6}tr(A^3)$.

س٥ (أ) إذا كان G رسماً عدد رؤوسه n فأثبت أن $\chi(G)\le\Delta(G)+1$.

(ب) لتكن $G=(V,E)$ رسماً بحيث $E\neq\emptyset$. أثبت ما يلي :
$\chi(G)=2$ إذا وفقط إذا كان G ثنائي التجزئة .

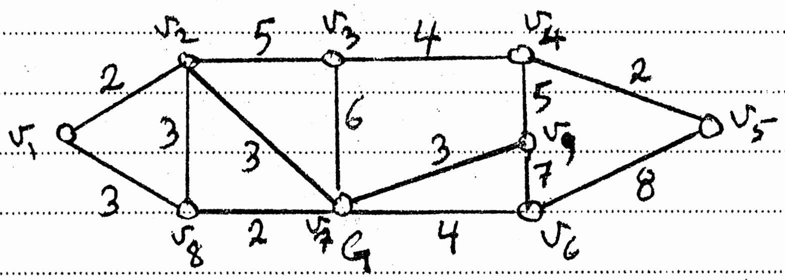
(جـ) إذا كان G هو الرسم التالي جد $\chi(G)$ بدون استخدام تلوين G .



س٦ (أ) جد جميع الأشجار T بحيث يكون الرسم المتمم $\bar{T}$ شجرة أيضاً .

(ب) إذا كانت T شجرة عدد رؤوسها n فأثبت أن عدد أضلاعها $n-1$.

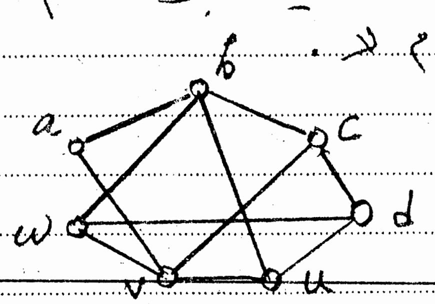
(جـ) جد شجرة مولدة صغرى للرسم الموزون G التالي :



س٧ (أ) إذا كان G رسماً عدد رؤوسه n وكان $\deg x+\deg y\ge n-1$ لكل رأسين غير متجاورين $x,y\in V(G)$ فأثبت أن G نصف هاملتوني .

(ب) إذا كان G رسماً مستوياً مترابطاً فأثبت أن $v+f-e=2$.

(جـ) بيّن فيما إذا كان الرسم G التالي : (i) ثنائي التجزئة أم لا (ii) هاملتونياً أم لا (iii) مستوياً أم لا .



لا يكتب
هذا الهـ

إجابة السؤال الثاني:

(أ) بما أن $U_n^{(1)} = \alpha_1^n,\ U_n^{(2)} = \alpha_2^n, \dots, U_n^{(k)} = \alpha_k^n$ حل للعلاقة الارتدادية فمن مبدأ التراكب نجد أن $U_n = c_1\alpha_1^n + \dots + c_k\alpha_k^n$ حل للعلاقة الارتدادية. لنفرض أن $U_n = b_n$ حل للعلاقة الارتدادية نبحث عن الثوابت c_k التي تحقق الشروط الابتدائية ~~بحيث تحقق الشروط الابتدائية~~ $U_0 = b_0,\ U_1 = b_1, \dots, U_{k-1} = b_{k-1}$ وباستخدام الشروط الابتدائية نجد

$$c_1 + c_2 + \dots + c_k = b_0$$

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_k c_k = b_1$$

$$\alpha_1^2 c_1 + \alpha_2^2 c_2 + \dots + \alpha_k^2 c_k = b_2$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1^{k-1} c_1 + \alpha_2^{k-1} c_2 + \dots + \alpha_k^{k-1} c_k = b_{k-1}$$

ولتكن A هي مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات الخطية بـ إن محدد A هو

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \dots & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le k} (\alpha_j - \alpha_i)$$

3

لأنه على شكل مصفوفة فاندرموند. وبما أن $\alpha_i \neq \alpha_j$ لكل $i \neq j$ فإن $\det A \neq 0$ وبالتالي فإنه يوجد حل وحيد لنظام المعادلات الخطية. يوجد حل وحيد للعلاقة الارتدادية على الشكل $U_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \dots + c_k\alpha_k^n$ وبالتالي هو وحيد
إذاً $U_n = b_n$ وحيد

(ب) أولاً نحل المعادلة المتجانسة

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$$

وبالتالي المعادلة المميزة هي

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 2$$

$$a_n^{(h)} = c_1(\alpha_1)^n + c_2\alpha_2^n = c_1 + c_2 2^n$$

لا يكتب في
هذا الهامش

$$c_0 n + c_1 n^2 - 3\left(c_0(n-1) + c_1(n-1)^2\right) + 2\left(c_0(n-2) + c_1(n-2)^2\right) = n$$

$$c_0 n + \cancel{c_1 n^2} - \cancel{3c_0 n} + 3c_0 - \cancel{3c_1 n^2} + 6c_1 n - 3c_1 + \cancel{2c_0 n} - 4c_0$$
$$+ \cancel{2c_1 n^2} - 8c_1 n + 8c_1 = n$$

$$5c_1 - c_0 = 0$$

$$-8c_1 = 1 \Rightarrow \boxed{c_1 = -\frac{1}{8}}$$

$$\boxed{c_0 = -\frac{5}{8}}$$

وعليه فإن

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1 + c_2 2^n - \frac{5}{8} n - \frac{1}{8} n^2$$

نستخدم الشروط الابتدائية

$$a_0 = 1 \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 1 \quad \Rightarrow c_1 = 1 - c_2$$

$$c_1 + 2c_1 - \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = -1$$

$$\Rightarrow c_1 + 2c_2 - \frac{3}{4} = -1$$

$$\Rightarrow c_1 + 2c_2 = \frac{3}{4} - 1 = \frac{-1}{4}$$

$$(1 - c_2) + 2c_2 = \frac{-1}{4}$$

$$1 + c_2 = \frac{-1}{4} \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{-5}{4}}$$

وعليه فإن

$$\boxed{c_1 = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}}$$

$$a_n = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} 2^n - \frac{5}{8} n - \frac{1}{8} n^2$$

$2\frac{1}{2}$

(ج) إن 2 قد يظهر وقد لا يظهر في المتتاليه وعليه فإن الداله المولده هي

$$g(x) = (x^1 + x^2 + x^3 + \cdots)^2 (1 + x^1 + x^2 + \cdots)$$

$$= x^2 (1 + x + x^2 + \cdots)^2 (1 + x + x^2 + \cdots)$$

$$= x^2 (1 + x + x^2 + \cdots)^3 = x^2 (1 - x)^{-3}$$

$$= x^2 \sum_{r=0}^{\infty} \binom{3 + r - 1}{r} x^r$$

وعليه فإن معامل x^r هو

$$\binom{3 + r - 2 - 1}{r - 2} = \binom{r}{r - 2} = \frac{r!}{2!\,(r-2)!}$$

أعد الحسابات

إجابة السؤال الثالث:

(a) إن الداله المولده للمتتاليه (n) هي $g(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

وإن الداله المولده للمتتاليه (2n) هي $g(x) = \dfrac{2x}{(1-x)^2}$

كذلك إن الداله المولده لـ (n^2) هي $x\,g'(x)$

$$x \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = h(x)$$

وإن الداله المولده لـ $(3n^2)$ هي $3h(x) = \dfrac{3(x + x^2)}{(1-x)^3}$

وعليه فإن الداله المولده لـ $a_n = 3n^2 + 2n$ هي

$$h(x) + 2g(x) = \frac{3(x + x^2)}{(1-x)^3} + \frac{2x}{(1-x)^2}$$

لا يكتب في
هذا الهامش

(ب) لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n\, a_{n-1} + 1)}{n!} x^n$$

$$= 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\, a_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + 2x\, g(x) + (e^x - 1)$$

$$g(x) = 2x\, g(x) + e^x$$

$$\Rightarrow g(x)(1 - 2x) = e^x$$

$$g(x) = \frac{e^x}{1 - 2x}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

3

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} + \frac{2}{(k-1)!} + \cdots + \frac{2^k}{0!}\right) x^n$$

وعليه فإن

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{1}{n!} + \frac{2}{(n-1)!} + \cdots + 2^n$$

$$a_n = 1 + n\,2 + \cdots + n!\, 2^n$$

(ج) نوجد الدالة المولدة وهي

3

$$g(x) = (x^0 + x^1 + \cdots + x^9)^3$$

$$= (1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^9)^3 = (1 - x^{10})^3 (1 - x)^{-3}$$

$$\left\{ \binom{3}{\ } \quad \binom{3}{\ } x^{10} \quad \binom{3}{\ } x^{20} \quad \binom{3}{\ } x^{30} \right\} \cdot \left\{ \binom{3 + 0 - 1}{\ } \right.$$

$$\binom{3}{0}\binom{3+10-1}{10}-\binom{3}{1}\binom{3+0-1}{0}$$

$$= 66 - 3 = 63$$

السؤال الرابع / (أ)

$(5, 4, 4, 3, 3, 3, 2)$

$(3, 3, 2, 2, 2)$

$(2, 1, 1, 2)$

$(2, 2, 1, 1)$

$(1, 0, 1)$

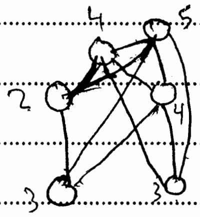
$(1, 1, 0)$

$(0, 0)$

3

إذا المتتالية رسمية

التجسيد هو



(ب) إذن $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = 2 \times 28 = 56$ وبما أن

عدد رؤوسه 12 فهناك 12 عدداً بحيث يكون المجموع 56

3 / بالتالي لابد أن تكون الأعداد الفردية زوجية $\{5, 3\}$ وعليه نبدأ

متتالية الدرجات هي

$y = 12$

$5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 3, 3$

$5(12-x) = 56$

(ج) $A^3 = [a_{ij}^{(3)}]$ إذن $a_{ij}^{(3)}$ ناتج من ضرب المصفوفة

وهو عدد المسارات من الرأس v_i إلى الرأس v_j من الطول 3

وعليه نجد أنه يساوي $\frac{1}{2} a_{ii}^{(3)}$ هو عدد الدوائر

إذن

لا يكتب في هذا الهامش

السؤال الخامس :- (أ) نستخدم الاستقراء الرياضي على

إذا كان $n=1$ فإن $\Delta(G)=0$ وعليه فإن $\chi(G)=1$

وهي صحيحة .

نفرض أنها صحيحة لأي رسم عدد رؤوسه $n\geq 1$. ليكن G

عدد رؤوسه $n+1$ أختر رأس v في G و اعتبر الرسم

$G-v$ عدد رؤوسه n ومن فرضية الاستقراء نجد أن $\chi(G-v)\leq\Delta(G-v)+1$

وعليه يوجد تلوين من الدرجة $\Delta(G-v)+1$ للرسم $G-v$

أولاً إذا كان $\Delta(G)=\Delta(G-v)$ فإن المتباينة $\chi(G-v)\leq\Delta(G)$

تبين لنا أنه يمكن أن نلون v بأحد الألوان المعطاة

ونحصل على تلوين من الدرجة $\Delta(G)+1$ لـ G

أما إذا كان $\Delta(G)\neq\Delta(G-v)$ فإن $\Delta(G-v)<\Delta(G)$ وعليه

نلون v بلون مختلف عن الألوان المعطاة وبالتالي نحصل على

تلوين من الدرجة $\Delta(G-v)+2$ لـ G وعليه نحصل على تلوين

$\Delta(G)+1$ للرسم G .

3

(ب) لنفرض أن G ثنائي التجزئة حيث $V=X\cup Y$

بما أن G غير صفري فإن $\chi(G)\geq 2$. أن نلون مجموعة X باللون c_1

ونلون مجموعة Y باللون c_2 وعليه نحصل على

تلوين من الدرجة 2 أي $\chi(G)=2$

الاتجاه الآخر

نفرض أن $\chi(G)=2$ وعليه يوجد تلوين من الدرجة 2 للرسم G

لنجعل مجموعة الرؤوس الملونة باللون c_1 هي X ولنجعل

مجموعة الرؤوس باللون c_2 هي Y ، والآن أي رأسين في X

غير متجاورين ، كذلك أي رأسين في Y غير متجاورين ، و

أي ضلع في G لابد أن يكون أحد طرفيه في X والآخر في Y

وعليه فإن G ثنائي التجزئة .

3

(ج) إن الرسم G غير تام وأن $\Delta(G)=4$ وعليه نجد من

نظرية بروكس $\chi(G)\leq 4$

وبما أن الرسم يحتوي على دورة فردية وهي ...

فإن

$\chi(G)\geq 3$

وبالتالي فإن $\chi(G)=3$ أو $\chi(G)=4$

2

لا يكتب
هذا الهامش

السؤال السادس/

(أ) عدد الأشجار هو واحد

~~(ب) نستخدم الاستقراء الرياضي إذا كان ...~~

~~... فهي صحيحة~~

~~نفرض أنها صحيحة لأي شجرة عدد رؤوسها K ...~~

~~شجرة عدد رؤوسها K+1 ... H−e ... أضلاعها~~

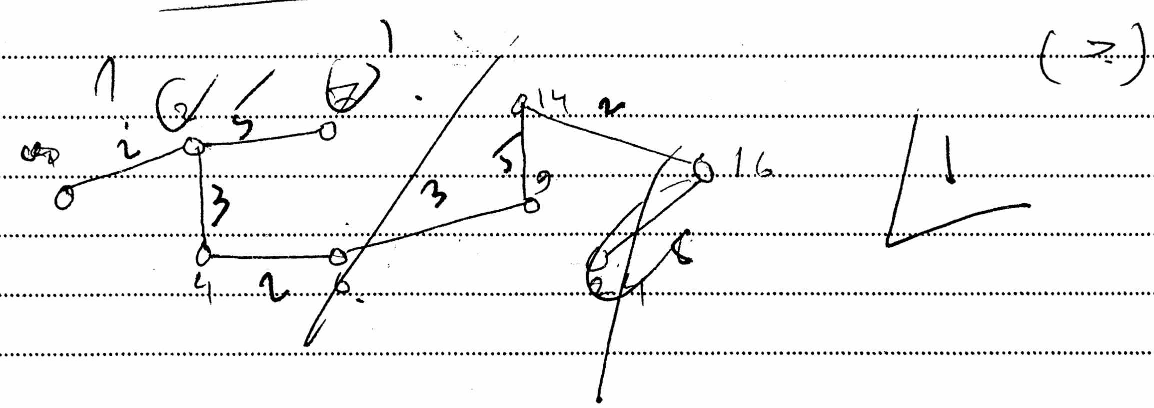
~~مترابط ولا يحتوي على دورات ... لا يحتوي على دورات~~

~~... شجرة عدد أضلاعها K فمن فرضية الاستقراء ...~~

(ب) نستخدم الاستقراء الرياضي على n ، إذا كانت $n=1$ فإن
وعليه فهي صحيحة .

نفرض أنها صحيحة لأي شجرة عدد رؤوسها $n \geq 1$
ليكن G شجرة عدد رؤوسه $n+1$ ، وأيضاً الرسم $G-v$ رسم
لدينا G مترابط ولا يحتوي على دورات لأن G لا يحتوي على دورات
إذاً $G-v$ شجرة عدد رؤوسها n وبالتالي من فرضية الاستقراء
نجد أن عدد أضلاعها $n-1$ لكن يوجد في الرسم G رأس
بحيث $degree=1$ ولهذا نجد أن عدد أضلاع G هو n فبالتالي
فهي محققة

(جـ)



لا يكتب في هذا الهامش

السؤال الرابع/

(أ) إذا كان $G \cong K_1$ فإن G يحتوي على طريق هاملتوني
لذا نفرض $n \geq 2$ و $G \neq K_1$ ونضع $H = G + K_1$ حيث $V(K_1) = \{z\}$
وعليه فإن $V(H) = n+1 \geq 3$

$$\deg_H x + \deg_H y = \deg_G x + 1 + \deg_G y + 1 \geq n+1$$

وعليه لكل x و y غير متجاورين في H وعليه يوجد
هاملتوني ~~دورة~~ لأن نبحث عن دورة هاملتونية ولذا
نحذف منها z وبالتالي نحصل على طريق هاملتوني
~~في~~ عند ئذ G تصبح هاملتوني

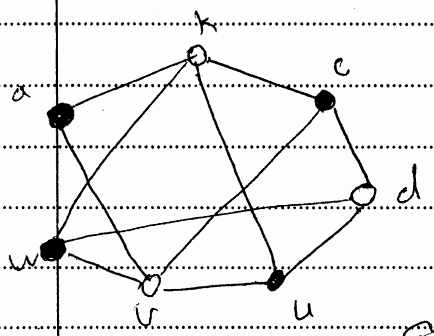
(ب) نستخدم الاستقراء الرياضي على e. إذا كان عدد
$G = K_1$ وعليه فإن $v = 1$، $f = 1$ إذاً فهي ~~محققة~~
نفرض الآن إنها صحيحة لأي رسم مستوي مترابط ~~عدد~~ أضلاعه
$e = K \geq 0$ لكن H ~~رسم~~ رسماً مستوياً مترابطاً
أضلاعه $K+1$ لدينا حالتان
إذا كان H لا يحتوي على دورات فإنه يكون شجرة عدد
رؤوسها v وعدد أضلاعها $v-1 = K+1 \Leftarrow v = K+2$
وعدد أوجهه $f = 1$ إذاً
$K+2 - K - 1 + 1 = 2$ وهي صحيحة
أما إذا كان H يحتوي على دورة ونحذف الضلع e
فإن الرسم $H - e$ رسماً مترابطاً عدد أضلاعه K
~~وعدد~~ وعدد أوجهه $f - 1$ ~~[illegible]~~ وعدد رؤوسه v فمن
الاستقراء نجد أنه

$$v - K + f - 1 = 2$$

$$\Rightarrow v - (K+1) + f = 2$$

وبالتالي فهي صحيحة

(د) (أ) ~~نلاحظ~~ قمنا بتلوين الرسم فوجدنا



$\chi(G) = 2$

وعليه من فقرة (ب) سؤال 5

نجد إن G ثنائي التجزئة

(ii) ليس هاملتونيا لأن لا يحتوي على دورة هاملتونية ~~للرسم G~~

(iii) غير مستويا لأن $v = 7$ وعليه

$2v - 4 = 14 - 4 = 10$

وإن $e = 11$

وعليه $e = 11 > 2v - 4 = 10$

ملاحظة ((بما إن G لا يحتوي على دورة فردية فإن $v-4$
لكن نحن وجدنا العكس))