جامعة الملك سعود	الاختبار النهائي	الفصل الدراسي الثاني ١٤٣٢/١٤٣٣هـ
كلية العلوم	في المقرر ٤٣٤ ريض	الزمن: ثلاث ساعات

ملحوظة: كل الرسوم المدروسة هنا هي رسوم بسيطة.

أجب عن كل من الأسئلة التالية:

١) (٣ درجات) في أي رسم عدد رؤوسه على الأقل 2، أثبت أنه يوجد على الأقل رأسان درجتاهما متساويتان.

٢) (٣ درجات) إذا كان G رسما متمما لنفسه عدد رؤوسه n، فأثبت انه إما $n \equiv 0 \mod 4$ و إما $n \equiv 1 \mod 4$.

٣) (٣ درجات) أثبت أن الشجرة التي عدد رؤوسها n، حيث $n \geq 2$، يوجد فيها على الأقل رأسان درجة كل منهما تساوي 1.

٤) (٣ درجات) G رسم عدد أضلاعه 11 و عدد رؤوسه 8، سبعة منها درجاتها متساوية. جد متتالية درجات G.

٥) جد جميع قيم n, m بحيث:

(أ) يكون الرسم $K_{m,n}$ هاملتونيا. (درجة واحدة)

(ب) يكون الرسم $K_{m,n}$ أويلريا. (درجة واحدة)

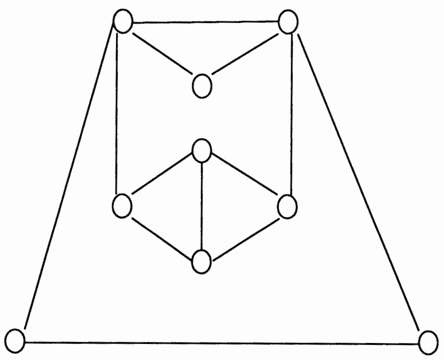
(ت) يكون الرسم $K_{m,n}$ مستويا. (درجة واحدة)

(ث) يكون الرسم $K_{m,n}$ شجرة. (درجة واحدة)

٦) (٤ درجات) إذا كان G رسما منتظما من النوع m، حيث $m \geq 1$، و كان $|V(G)| \geq 2m + 2$، فأثبت أن متمم الرسم G هو رسم هاملتوني.

٧) (٤ درجات) أثبت أنه إذا كان G رسما هاملتونيا، فإن $Comp\ (G - S) \leq |S|$ لكل مجموعة جزئية فعلية غير خالية S من $V(G)$ حيث $Comp\ (G - S)$ هو عدد مركبات الرسم $G - S$.

٨) (٣ درجات) بين ما إذا كان الرسم G *أدناه* هاملتونيا و إذا كان كذلك فجد دورة هاملتونية فيه.



G

٩) (٤ درجات) إذا كان G رسما مستويا مترابطا عدد رؤوسه v و عدد أضلاعه e و طول أقصر دورة فيه يساوي k، فأثبت أن:

$$e \leq \frac{k}{k-2}\,(v-2)$$

١٠) جد عدد تباديل حروف الكلمة SAUDIARABIA بحيث:

(أ) A لا يجاور A**.** (درجتان)

(ب) D,R,S تكون متجاورة**.** (درجتان)

١١) (٤ درجات) أثبت أن عدد التطبيقات الشاملة من المجموعة $A = \{a_1,a_2, ...,a_m\}$ إلى المجموعة $B = \{b_1,b_2,....,b_n\}$، حيث $m \geq n$، يساوي:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^m$$

١٢) (٤ درجات) جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة: $X_1 + X_2 + X_3 = 15$ بحيث:

$$0 \leq X_1 \leq 7 \quad , \quad 0 \leq X_2 \leq 10 \quad , \quad 0 \leq X_3 \leq 5$$

١٣) (٤ درجات) جد عدد تباديل 10 ,... ,2 ,1 التي تجعل كل عدد فردي في غير موضعه الطبيعي.

١٤) (٣ درجات) إذا كانت C_{10} دورة في رسم ما، و إذا عنونت رؤوسها عشوائيا بالأعداد: 10 ,... ,2 ,1 ، فأثبت أنه توجد 3 رؤوس متعاقبة مجموع عناوينها أكبر من أو يساوي 17.

لا يكتب في
هذا الهامش

(1 نثبت أنه: $\exists u \neq v \in V : deg(u) = deg(v)$

لدينا $\forall x \in V: deg(x) \in \{0,1,\dots,n-1\}$

إذا وجد الرأس "0" فلا يوجد الرأس من الدرجة $(n-1)$ مجاورة

وإذا وجد رأس من الدرجة $(n-1)$ فلا يوجد رأس من الدرجة "0"

$$\forall x \in V: deg(x) \in \{0,1,\dots,n-2\}$$

$$(\forall x \in V: deg(x) \in \{1,2,\dots,n-1\})$$

إذاً ترتيب E بحيث $|E| = n-1$ بحيث $\{deg\, x : x \in V\} \subseteq E$

إذاً من مبدأ برج الحمام يوجد على الأقل رأسان درجتاهما متساويتان

$$\therefore \exists u \neq v \in V : deg(u) = deg(v)$$

(2 بما أن G متمم لنفسه، أي أن $G = \bar{G}$

إذاً $|E(G)| = |E(\bar{G})| = |E|$ و $|E(G)| + |E(\bar{G})| = \binom{n}{2}$

$$2|E| = \binom{n}{2}$$

$$2|E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$4|E| = n(n-1)$$

$$\therefore n(n-1) \equiv 0 \bmod 4$$

i) $n \equiv 0 \bmod 4 \Rightarrow n(n-1) \equiv 0 \bmod 4$

ii) $n \equiv 1 \bmod 4 \Rightarrow n-1 \equiv 0 \bmod 4$ وبالتالي $n(n-1) \equiv 0 \bmod 4$

iii) $n \equiv 2 \bmod 4 \Rightarrow n-1 \equiv 1 \bmod 4$ وبالتالي $n(n-1) \equiv 2 \bmod 4$

iv) $n \equiv 3 \bmod 4 \Rightarrow n-1 \equiv 2 \bmod 4$ وبالتالي $n(n-1) \equiv 6 \bmod 4 \equiv 2 \bmod 4$

بما أن $n(n-1) \equiv 0 \bmod 4$

إذاً إما $n \equiv 0 \bmod 4$ or $n \equiv 1 \bmod 4$

لا يكتب في الهامش

③ لتكن T شجرة، و $P=(v_1,\dots,v_m)$ ممر ذا طول أعظم في T

بما أن $n\ge 2$ فإن $m\ge 2$ لأن T تحتوي على ضلع، ليكن v_1v_k ضلعاً في T حيث

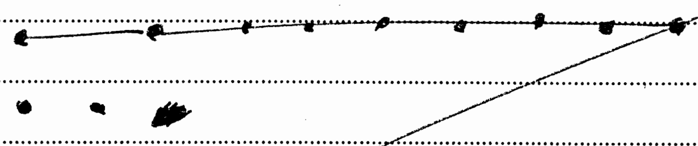
$3\le k\le$ إذاً توجد دورة $(v_1,v_2,\dots,v_m,v_1)$ وهذا يناقض كون T شجرة.

إذاً v_1v_k ليست شجرة كذلك xv_1 ليس ضلعاً لأي $x\notin P(V)$

لأن P ممر ذا طول أعظم في T. إذاً $\deg(v_1)=1$ وبالمثل $\deg(v_m)=1$

---

④



لا يكتب في هذا الهامش

5 (أ) $G=(V,E)$ رسم ثنائي التجزئة $V=V_1 \cup V_2$

~~$G=(V_1,E)$ و $G_1=(V_2,E)$ ...~~

$|V_1|=n$, $|V_2|=m$

يكون $K_{m,n}$ هاملتوني إذا كان

$|n|=|m|$ $m=n \geq 2$

ولا يوجد به أي دورة فردية

0,7

(ب) ليكن G رسماً ، $m \geq 1$ و $n \geq 1$ ، $G=(V,E)$ ، $V(G)=V_1 \cup V_2$

G وهو رسم ثنائي التجزئة تام . $E(G)=\{\{a_1,a_2\}, a_1 \in V_1 , a_2 \in V_2\}$

$|V_1|=n$, $|V_2|=m$

$K_{m,n}$ مترابط ونرمز له $\forall x \in V_1 : deg(x)=n$

$\forall y \in V_2 : deg(y)=m$

تكون كل الرؤوس V زوجية إذا وفقط إذا كان m,n زوجيان

إذاً : يكون $K_{m,n}$ أويلري $\Longleftrightarrow$ m,n زوجيان موجبان

(ت) يكون $K_{m,n}$ مستوياً إذا كان

$K_{m,n}$ مترابط و يحقق

$e \leq 3v-6$

0,5

حيث v عدد الرؤوس و e عدد الأضلاع الرسم $K_{m,n}$

كتب في الهامش:

(6) ليكن $|V(G)|=n$ لدينا $n \geq 2m+2$

بما أن G رسماً منتظماً من النوع m فإن $\bar{G}$ رسماً منتظماً من النوع $n-1-m$

$$\forall u \in V(G) : \deg_{\bar{G}}(u) = n-1-\deg u$$
$$= n-1-m$$

لما كان $m \geq 1$ فإن $n \geq 2m+2 \geq 4$

$\therefore n \geq 4$

ليكن $x \neq y$ رأسان غير متجاورين

$$\deg_{\bar{G}} x + \deg_{\bar{G}} y = 2(n-1-m)$$

$$2(n-1-m) - n = n-2m-2 \geq 0$$

لأن $n \geq 2m+2$

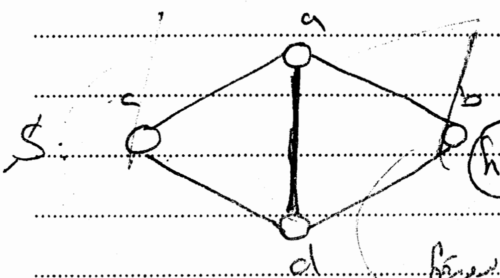
$$\therefore \deg_{\bar{G}} x + \deg_{\bar{G}} y \geq n$$

إذاً الرسم $\bar{G}$ هاملتوني

(7) تتحقق العلاقة عندما $comp(G-S)=1$

لنفرض أن $comp(G-S)=m>1$ ، لتكن $G_1, G_2, \dots, G_m$ مركبات الرسم $G-S$ ولتكن $v_1 e_1 v_2 \dots v_{n-1} e_{n-1} v_n e_n v_1$ دورة هاملتونية ، واضح أنه إذا كان k هو أكبر دليل للرسم G بحيث $v_k \in G_i$ فإن $v_{k+1} \in S$ وذلك بإعتبار $v_{k+1} = v_1$ وذلك عندما $n=k$ وبما أن هذا متحقق لكل $1 \leq i \leq m$ فإن $comp(G-S) \leq |S|$

(8) لنأخذ المجموعة الجزئية S, لدينا



لتكن h دورة هاملتونية

$\because \deg_S c \geq 2$ فإن ضلعا ac و cd ينتميان للدورة h

وبما أن $\deg b \geq 2$ فإن ضلعا ba و bd ينتميان للدورة

إذاً الدورة h تحتوي الدورة (c, a, b, d, c)

والدورة لا تمر بكل الرؤوس الرسم G ~~هاملتوني~~

$\therefore G$ ليس هاملتوني

لا يكتب في هذا الهامش

ثنائي التجزئة

(9) ليكن $H=(X,Y,E'(H))$ رسم مستوٍ مترابط عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه e ومحيط أقصر دورة فيه يساوي k

ليكن $X=\{x_1,x_2,\dots,x_e\}$ مجموعة الأضلاع e يكون $x_i y_j$ ضلعاً في H إذا كان x_i أحد أضلاع
و $Y=\{y_1,y_2,\dots,y_f\}$ مجموعة الأوجه f تحد الوجه y_j

نلاحظ أن: $\sum_{j=1}^{f} \deg_H(Y_j) \geq k$

كذلك $\sum_{i=1}^{e} \deg_H(X_i) \leq 2$ (لأن أي ضلع يحد على الأكثر بوجهين)

$$\sum_{j=1}^{f} \deg_H(Y_j) \geq \sum_{j=1}^{f} k = kf$$

$$\sum_{i=1}^{e} \deg_H(X_i) \leq \sum_{i=1}^{e} 2 = 2e$$

$$kf \leq |E'| = \sum_{j=1}^{f} \deg(Y_j) = \sum_{i=1}^{e} \deg(X_i) \leq 2e$$

$\therefore 2e \geq kf$ وبما أن الرسم مترابط ومستوٍ: يحقق صيغة أويلر

$v-e+f = 2 \Leftarrow kv-ke+kf = 2k \Leftarrow kv-ke+2e \geq 2k \Leftarrow kv-(k-2)e \geq 2k$

$(k-2)e \leq kv-2k \Leftarrow (k-2)e \leq k(v-2) \Leftarrow e \leq \frac{k}{(k-2)}(v-2)$

(10) (أ) A لا يجاور A

$S(1), \boxed{A(4)}, U(1), I(2), D(1), R(1), B(1)$

لدينا ، $\binom{7}{1,1,2,1,1,1} = \frac{7!}{2!} = 2520$

إذاً N عدد تباديل حروف الكلمة بحيث A لا يجاور A هو $N=\left(\frac{7!}{2!}\right)$ ~~20160~~

(ب) S,R,D تكون متجاورة نعتبرها كحرف واحد ★

لدينا

$$\binom{7}{4,1,2,1} = \frac{7!}{4!1!2!1!} = 105$$

تبديل

و تباديل الحرف الواحد ★ هو $\binom{3}{1,1,1} = \frac{3!}{1!} = 6$

إذاً H عدد تباديل حروف الكلمة بحيث S,R,D متجاورة هو

$H = 6 \times 105 = 630$

لا يكتب في هذا الهامش

4

(11) ليكن U عدد التطبيقات من A إلى B . لنضع

~~$A_k = \{f \notin b_k$~~ ~~$A_k = \{b_k \notin$~~

$A_k = \{f \in U : b_k \notin R(f)\}$ حيث $R(f)$ مدى f

علينا حساب $|U - A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$ وواضح أن: $|U| = n^m$

لنحسب من العلاقة $\alpha_1 = |A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|$

من تعريف A_k ينتج أن $|A_k|$ يساوي عدد التطبيقات من A إلى $B\setminus\{b_k\}$

ومنه: $|A_k| = (n-1)^m$ $\therefore \alpha_1 = \sum_{k=1}^{n} |A_k| = n(n-1)^m$

لحساب α_2 نجد أن $\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_1 \cap A_n| + \cdots$

$+ |A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|$

نلاحظ أن: $|A_i \cap A_j|$ حيث $1 \le i < j \le n$ يساوي عدد التطبيقات من A إلى $B\setminus\{b_i, b_j\}$. $\therefore |A_i \cap A_j| = (n-2)^m$

إذاً: $\alpha_2 = \binom{n}{2}(n-2)^m$

~~وهكذا~~ ونلاحظ أن $\alpha_i = \binom{n}{i}(n-i)^m$ لكل $1 \le i \le n$

$\therefore |U - A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots + (-1)^n \alpha_n$ $\boxed{(-1)^n}$

$= n^m - n(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m + \cdots + \binom{n}{3}(n-3)^m$

$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$

2

(12) ليكن U عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ حيث $x_i \ge 0$ ، $1 \le i \le 3$

$U = \binom{3-1+15}{15} = \binom{17}{15} = 136$

* $0 \le x_1 \le 7$; $x_1 \ge 8$

~~$U = \binom{3-1+15}{}$~~ عدد الحلول الصحيحة لمعادلة $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ عند $x_1 \ge 8$

$\alpha_1 = \binom{3-1+15-8}{15-8} = \binom{9}{7} = 36$

* $0 \le x_2 \le 10$; $x_2 \ge 11$ عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $x_1+x_2+x_3=15$ عندما $x_2 \ge 11$

$\alpha_2 = \binom{3-1+15-11}{15-11} = \binom{6}{4} = 15$

* $0 \le x_3 \le 5$: $x_3 \ge 6$ عدد حلول المعادلة $x_1+x_2+x_3=15$ عندما $x_3 \ge 6$

$\alpha_3 = \binom{3-1+15-6}{15-6} = \binom{11}{9} = 55$

$\therefore |U - A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$

$= \binom{17}{15} - \binom{9}{7} + \binom{6}{4} - \binom{11}{9}$

$= 136 - 36 + 15 - 55$

$= 30$

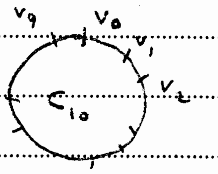
لا يكتب في هذا الهامش

~~(12) N = عدد التباديل ... التي تجعل كل عدد فردي في موضعه الطبيعي~~

~~عدد التباديل ...~~ ~~$n=10$~~

~~الاعداد الفردية هي $1,3,5,7,9,11$~~ ~~$1,3,5,7,9,11$~~

(11)



لنضع الاعداد على الرؤوس v_i, v_{i+1}, v_{i+2} ، $n=10$

ونسمي s_i مجموعها $\sum_{i=1}^{10} i = \frac{(1+10)\times 10}{2} = 55$

نلاحظ أن $\sum_{i=0}^{9} s_i$ لكل $i \in \{0,\dots,9\}$ وقع احتسابه 3 مرات

$\therefore m = \sum_{i=0}^{9} s_i = 3\times 55 = 165$

$\left[\frac{m-1}{n}\right]+1 = \left[\frac{165-1}{10}\right]+1 = 17$

من مبدأ برج الحمام يوجد صندوق يحتوي $\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$ كرة على الاقل

∴ من مبدأ برج الحمام يوجد s_i يحقق $s_i \geq 17$ على الاقل

∴ توجد 3 رؤوس متعاقبة مجموع عناوينها أكبر من او يساوي 17.

(13) N = عدد التباديل $1,2,\dots,10$ التي تجعل كل عدد فردي في غير موضعه الطبيعي

الاعداد الفردية من التباديل $1,2,\dots,10$ هي $1,3,5,7,9$ ، $U = S_{10}$ $\therefore |U| = 10!$

$A_k = \{f \in U : f(2k+1) = 2k+1\}$ من A_k ينتج ان $|A_k|$ يساوي عدد التباديل $\{1,2,\dots,10\} \setminus \{2k+1\}$

$\therefore |A_k| = 9!$

$\alpha_1 = \sum_{k=1}^{5} |A_k| = 5(9!)$

$k \neq k' \in \{1,\dots,10\}$

$A_k \cap A_{k'} = \{f \in U : f(2k+1) = 2k+1,\ f(2k'+1) = 2k'+1\}$

نلاحظ أن: $|A_k \cap A_{k'}|$ يساوي عدد التباديل ~~$\{1,2,\dots,10\} \setminus \{2k+1, 2k'+1\}$~~ $\{1,\dots,10\} \setminus \{k,k'\}$

$\therefore |A_k \cap A_{k'}| = 8!$

$\therefore \alpha_2 = \binom{5}{2} 8!$

بالمثل: k, k', k'' عناصر مختلفة في $\{1,\dots,10\}$

$\alpha_3 = \binom{5}{3} 7!$ ومنه $|A_k \cap A_{k'} \cap A_{k''}| = 7!$

كذلك نلاحظ أن: $\alpha_i = \binom{5}{i}(n-i)!$ لكل $1 \leq i \leq 5$

$\therefore |U - A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots + (-1)^n \alpha_n$

$\therefore N = 10! - 5(9!) + \binom{5}{2} 8! - \binom{5}{3} 7! + \binom{5}{4} 6! - \binom{5}{5} 5!$